考研背诵手册

rogeryoungh

2023 年 12 月 13 日

目录

第一章　高等数学

1.1　函数、极限、连续

1.1.1　大纲要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系。

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性。

3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念。

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念。

5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左极限、右极限之间的关系。

6. 掌握极限的性质及四则运算法则。

7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法。

8. 理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的比较方法，会用等价无穷小量求极限。

9. 理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），会判别函数间断点的类型。

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理），并会应用这些性质。

1.1.2　函数

有界性：若函数 f 在定义域 D 上，存在正数 M 使得 $|f(x)| \leqslant M$ 对任意 $x \in D$ 都成立，则称 f 在 D 上有界。

单调性：若函数 f 在定义域 D 上，对其上任意两点 x_1, x_2（不妨 $x_1 < x_2$），恒有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 f 在区间 D 上是单调增加的；恒有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称 f 在区间 D 上是单调减少的。

1.1.3　数列极限

定义 1.1.1 ⋄ 数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义

设 $\{a_n\}$ 为数列，A 为定数。若对任给的正数 ε，总存在正整数 $N = N(\varepsilon)$，使得当 $n > N$ 时有

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A，或称 A 为数列 $\{a_n\}$ 的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A，或\ a_n \to a(n \to \infty)$$

数列极限的性质：

- 唯一性：若数列收敛，则极限唯一；
- 局部有界性：若数列收敛，则数列有界；
- 局部保号性：若数列收敛于 A，且 $|A| \neq 0$，则存在正整数 N 使得当 $n > N$ 时 $a_n A > 0$。

数列极限的存在准则：

- 单调有界原理：单调有界数列必有极限。
- 夹逼准则：若存在 N 使得当 $n > N$ 时有 $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$，且 $\lim x_n = \lim z_n = A$，则 $\lim y_n = A$。
- 致密性定理：数列的任何子列都收敛。
- Cauchy 收敛准则：数列收敛当且仅当数列为 Cauchy 列。即任给 $\varepsilon > 0$，均存在 $N(\varepsilon)$ 使任取 $m, n > N(\varepsilon)$ 有 $|a_m - a_n| < \varepsilon$。
- 压缩映射原理：设递推数列 $a_{n+1} = f(a_n)$，若存在常数 $L \in (0,1)$ 使得对任意 x_1, x_2 有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2|$ 则数列收敛。

1.1.4 函数极限

定义 1.1.2 ⋄ 函数在 x_0 处的极限

设函数 f 在去心邻域 $U^\circ(x_0; \delta')$ 内有定义，A 为定数。若对任给的 $\varepsilon > 0$，存在正数 $\delta < \delta'$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称函数 f 当 x 趋于 x_0 时以 A 为极限，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to x_0)$$

定义 1.1.3 ⋄ 函数在 ∞ 处的极限

设函数 f 在 $|x| > M'$ 上有定义，A 为定数。若对任给的 $\varepsilon > 0$，存在正数 $M = M(\varepsilon) > M'$，使得当 $x > M$ 时，有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

则称函数 f 当 x 趋于 ∞ 时以 A 为极限，记作

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to \infty)$$

笔记　注意函数在 ∞ 处的极限包括 $+\infty$ 和 $-\infty$ 两个方向。

函数极限的性质：

- 唯一性：若函数极限存在，则极限唯一；
- 局部有界性：若函数极限存在，则存在去心邻域使其有界；
- 局部保号性：若函数极限为 A，且 $|A| \neq 0$，则 f 在某去心邻域 $U^\circ(x_0)$ 上满足 $Af(x) > 0$。
- 左极限和右极限相等 $\iff$ 极限存在。

函数极限的存在准则：

- 夹逼定理：若 $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ 且 $\lim f(x) = \lim g(x) = A$，则 $\lim g(x) = A$。
- Heine 定理：极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在的充要条件是，任何含于空心邻域 $U^\circ(x_0)$ 的收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$，极限 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$ 都收敛于同一值。
- Cauchy 收敛准则：极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在的充要条件是，任给 $\varepsilon > 0$ 都存在邻域使得在其中任取 $x_1, x_2 \in U^\circ(x_0)$ 使得 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$。

1.1.5 常用极限

经典极限，不用证明：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$$

经典但需要证明的极限：

例 1.1.4

如果 $a_1,\cdots,a_k>0$，那么有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+\cdots+a_k^n}=\max\{a_1,\cdots,a_k\}$$

证明 不妨设 $a_1=\max\{a_1,\cdots,a_k\}$，那么有

$$a_1<\sqrt[n]{a_1^n+\cdots+a_k^n}<\sqrt[n]{ka_1^n}\to a_1$$

由夹逼原理知原式成立。 □

1.1.6 连续

定义 1.1.5 ◇ 连续性

设函数 f 在某 $U(x_0)$ 上有定义。若

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

则称 f 在点 x_0 连续。
连续性的 $\varepsilon-\delta$ 形式定义：若对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则称函数 f 在点 x_0 连续。

记 $\Delta x=x-x_0$，称为自变量 x 在点 x_0 的增量或改变量。设 $y_0=f(x_0)$，相应的函数 y 在点 x_0 的增量记为

$$\Delta y=f(x)-f(x)=f(x+\Delta)-f(x_0)=y-y_0$$

定义 1.1.6 ◇ 间断点

设函数 f 在某去心邻域 $U^{\circ}(x_0)$ 上有定义，但 f 在 $f(x_0)$ 处无定义、或有定义但不连续，则 x_0 为间断点。

间断点分类：

- 第一类间断点：$f(x^+)$ 与 $f(x^-)$ 均存在。
  - 可去间断点：$f(x^+)=f(x^-)$。
  - 跳跃间断点：$f(x^+)\neq f(x^-)$。
- 第二类间断点：$f(x^+)$ 与 $f(x^-)$ 至少有一个不存在。
  - 无穷间断点：$f(x^+)$ 与 $f(x^-)$ 至少有一个为 ∞。
  - 震荡间断点：函数在区间内变动无限多次，如 $\sin\frac{1}{x}$。

最值：设 f 在区间 I 上有定义，若存在 $x_0 \in I$ 使得 $f(x) \leqslant f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 是区间上的最大值；若使得 $f(x) \geqslant f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 是区间上的最小值。

连续函数的性质：

- 基本初等函数在定义域区间内都是连续的；
- 最值定理：闭区间上连续的函数一定有界且必存在最大和最小值。
- 零点定理：函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，若 $f(a)f(b) < 0$ 则必存在至少一点 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f(\xi) = 0$。
- 介值定理：函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，那么对于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的数 c，必存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f(\xi) = c$。

1.2 一元函数微分学

1.2.1 大纲要求

1. 理解导数和微分的概念，理解导数与微分的关系，理解导数的几何意义，会求平面曲线的切线方程和法线方程，了解导数的物理意义，会用导数描述一些物理量，理解函数的可导性与连续性之间的关系。

2. 掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则，掌握基本初等函数的导数公式。了解微分的四则运算法则和一阶微分形式的不变性，会求函数的微分。

3. 了解高阶导数的概念，会求简单函数的高阶导数。

4. 会求分段函数的导数，会求隐函数和由参数方程所确定的函数以及反函数的导数。

5. 理解并会用罗尔（Rolle）定理、拉格朗日（Lagrange）中值定理和泰勒（Taylor）定理，了解并会用柯西（Cauchy）中值定理。

6. 掌握用洛必达法则求未定式极限的方法。

7. 理解函数的极值概念，掌握用导数判断函数的单调性和求函数极值的方法，掌握函数最大值和最小值的求法及其应用。

8. 会用导数判断函数图形的凹凸性（注：在区间 (a, b) 内，设函数 $f(x)$ 具有二阶导数。当 $f'(x) > 0$ 时，$f(x)$ 的图形是凹的；当 $f(x) < 0$ 时，$f(x)$ 的图形是凸的），会求函数图形的拐点以及水平、铅直和斜渐近线，会描绘函数的图形。

9. 了解曲率、曲率圆与曲率半径的概念，会计算曲率和曲率半径。

1.2.2 导数

定义 1.2.1 ⋄ 微分

设函数 f 定义在某个邻域内 $U(x_0, r)$ 内，如果存在常数 A 使得

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$$

当 $x \to x_0$ 成立，则称 f 在 x_0 处可微。线性函数 $A(x - x_0)$ 称为 f 在 x_0 处的微分。我们记作 $\mathrm{d}y = \mathrm{d}f = A\,\mathrm{d}x$。

定义 1.2.2 ◇ 导数

设函数 $y=f(x)$ 在邻域 $U(x_0,r)$ 内有定义，若极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，则称函数 f 在点 x_0 可导，并称该极限为函数 f 在点 x_0 的导数，记作 $f'(x_0)$。

显然一元函数可微等价于可导。

可导与连续（记住 $|x|$ 和 $x|x|$）：

$$\text{左右连续} \Leftarrow \text{左右可导} \Leftarrow \text{可导} \Rightarrow \text{连续} \Leftrightarrow \text{左右连续}$$

重点例子：

$$f_n(x)=x^n\sin\frac{1}{x},\quad f_n(0)=0$$

- $f_1(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，但 $x=0$ 处不可导。
- $f_2(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，在 $\mathbb{R}$ 上可导，但 $f'(x)$ 不在 $x=0$ 处连续。
- $f_3(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，在 $\mathbb{R}$ 上可导，且 $f'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续。

导数关于加法线性

$$(u\pm v)'=u'\pm v',\quad (Cu)'=Cu'$$

乘除法

$$(uv)'=u'v+v'u,\quad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

复合函数的求导法则：设 $y=f(u),u=g(x)$ 且 $f(u),g(x)$ 都可导，那么

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},\quad y'(x)=f'(u)g'(x)$$

高阶导数的计算（Leibniz 公式）：若 $f=uv$，则

$$f^{(n)}=(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}v^{(k)}$$

一阶微分的不变性：无论 u 是中间变量还是自变量，微分形式 $\mathrm{d}y=f'(u)\,\mathrm{d}u$ 保持不变。二阶就没有不变性。

1.2.3 常见导数公式

指数对数幂函数

$$(C)'=0,\quad (x^a)'=ax^{a-1},\quad (\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x,\quad (\ln x)'=\frac{1}{x}$$

当 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 时

$$(a^x)'=\ln a,\quad (\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$$

三角函数

$$(\sin x)'=\cos x,\quad (\cos x)'=-\sin x,\quad (\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

另一堆三角函数

$$(\cot x)'=-\csc^2 x,\quad (\sec x)'=-\sec x\tan x,\quad (\csc x)'=\sec x\cot x$$

反三角函数

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad (\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$$

1.2.4 L'Hospital 法则

定理 1.2.3 ◇ L'Hospital 法则

设 f, g 是 (a, b) 上的连续可导函数，$g' \neq 0$，当 $x \to a+$ 时:

- (0/0 型) 有 $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$
- (∞/∞ 型) 有 $\lim f(x) = \lim g(x) = \infty$
- ($*/\infty$ 型) 有 $\lim g(x) = \infty$

且极限 $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，则

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

笔记 特别注意使用 L'Hospital 法则前后函数是否连续!

定理 1.2.4 ◇ Stolz 定理一

设数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$，且 $\{y_n\}$ 严格单调地趋于 $+\infty$，如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = A$$

定理 1.2.5 ◇ Stolz 定理二

设数列 $\{y_n\}$ 严格单调地趋于 0，且数列 $\{x_n\}$ 也收敛到 0，那么如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = A$$

1.2.5 导数的应用

单调性

若函数 f 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，若 $f' \geqslant 0$ 则 f 在 $[a, b]$ 内单调递增；若 $f' \leqslant 0$ 则 f 在 $[a, b]$ 内单调递减。

极值：若函数 f 在某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，若在去心邻域 $U^\circ(x_0)$ 上满足 $f(x) < f(x_0)$ 则 $f(x_0)$ 是在 f 上的极大值，x_0 称为 f 的极值点。

驻点：导数为 0 的点。

定理 1.2.6 ◇ Fermat 定理

设函数 f 在点 x_0 的某邻域上有定义，且在点 x_0 可导。若点 x_0 为极值点，则必有 $f'(x_0) = 0$。

证明 不妨设 x_0 为 f 的极小值点，则存在邻域 $U(x_0,\delta)$ 且满足不等式 $f(x)\leqslant f(x_0)$，那么

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0,\quad x\in(x_0-\delta,x_0)\qquad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant 0,\quad x\in(x_0,x_0+\delta)$$

从而

$$0\leqslant f'_+(x_0)=f'(x_0)=f'_-(x_0)\leqslant 0$$

故 $f'(x_0)=0$。 □

极值的第一充分条件：设 f 在 x_0 处连续，且在 x_0 的某去心邻域 $U^\circ(x_0,\delta)$ 可导。

- 若 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 处两侧异号，则 x_0 处取得极值。
- 若 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 处两侧同号，则 x_0 处不是极值点。

极值的第二充分条件：设 f 在 x_0 处二阶可导，且 $f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0$，则 f 在 x_0 处取得极值。

定理 1.2.7 ◇ Darboux 定理

函数 f 在 $[a,b]$ 上存在导数，且 $f'_+(a)\neq f'_-(b)$，对于任给的介于 $f'_+(a),f'_-(b)$ 之间的实数 k，总是存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=k$

证明 注意该定理并未要求导数连续，无法使用介值定理。令 $g(x)=f(x)-kx$。不妨设 $g'_+(a)<0<g'_-(b)$，取 $g(\xi)=\min_{[a,b]}g$。取两个邻域

$$\frac{g(x)-g(a)}{x-a}<0,\quad x\in U(a,\delta)\qquad \frac{g(x)-g(b)}{x-b}>0,\quad x\in U(b,\delta)$$

因此存在 $a<x_1<x_2<b$ 使得 $g(x_1)<g(a)$ 和 $g(x_2)<g(b)$。故 ξ 在开区间 (a,b) 内，因此 ξ 为 g 的极值点，由 Fermat 定理知 $g'(\xi)=f'(\xi)-k=0$。 □

凹凸性

定义 1.2.8 ◇ 凹凸性

设 f 为定义在区间 I 上的函数，若对 I 上当任意两点 x_1,x_2，不妨设 $x_1<x_2$ 若

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

则曲线上凹。若

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

则曲线上凸。

二阶导和凹凸性（记住 x^2 就行）：设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，若在 (a,b) 内 $f''>0$ 则曲线上凹；若 $f''<0$，则上凸。

拐点：函数在 $P(x_0,f(x_0))$ 左右侧凹凸性不一致。注意拐点是 $P(x,y)$。

拐点的第一充分条件：设 f 在 $U(x_0)$ 连续，去心邻域内二阶可导（注意不要求 $f''(x_0)$ 存在。

- 若 $f''(x)$ 在 $x=x_0$ 处两侧异号，则 $(x_0,f(x_0))$ 处是拐点。
- 若 $f''(x)$ 在 $x=x_0$ 处两侧同号，则 $(x_0,f(x_0))$ 处不是拐点。

拐点的第二充分条件：设 f 在 x_0 处三阶可导，且 $f''(x_0)=0,f'''(x_0)\neq 0$，则 f 在 $(x_0,f(x_0))$ 处取得拐点。

拐点的第三充分条件：设 f 满足

$$f'(x)=f''(x_0)=\cdots f^{(n)}(x_0)=0$$

但 $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$，则

- 当 n 是偶数时，$(x_0,f(x_0))$ 是拐点；
- 当 n 是奇数时，$(x_0,f(x_0))$ 是极值点；

平面几何

渐近线：若曲线上的动点 M 无限的远离原点时，点 M 与某固定的直线 L 的距离趋向于 0，则称 L 是曲线的渐近线。有以下三种：

- 若 $\lim\limits_{x\to a\pm}=\infty$，则称 $x=a$ 是其铅直渐近线；
- 若 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}=c$，则称 $y=c$ 为其水平渐近线。
- 若 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a\neq 0$ 且 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)-ax=b$，则称 $y=ax+b$ 为其水平渐近线。

平面曲线 $y=f(x)$ 在 $M(x_0,y_0)$ 处的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

法线方程为

$$y-y_0=\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

曲率：

$$K=\frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{|y''x'-x''y'|}{((x')^2+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

半径 $\rho=\frac{1}{K}$。

1.2.6 微分中值定理

微分中值定理主要有三个：Rolle 定理、Lagrange 中值定理和 Cauchy 中值定理。

定理 1.2.9 ◇ Rolle 中值定理

若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续可导，且 $f(a)=f(b)$。则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$。

证明 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以有最大值 M 和最小值 m。

1. 若 $m=M$，显然成立。

2. 若 $m<M$，又 $f(a)=f(b)$，故最值必然在 $\xi\in(a,b)$ 中取到，从而 $x=\xi$ 是其极值点，由 Fermat 定理知 $f'(\xi)=0$。 □

我们可以做更多点的推广。假如 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$ 都相等，据此存在 $\xi_1\in(x_1,x_2)$ 和 $\xi_2\in(x_2,x_3)$ 使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$，再用一遍定理知存在 $\xi_3\in(\xi_1,\xi_2)$ 使得 $f''(\xi_3)=0$。

定理 1.2.10 ◇ Lagrange 定理

若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 中可微，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

证明 做辅助函数

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

显然 $F(a)=F(b)=0$，且满足 Rolle 定理的其他两个条件，故存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

移项即证。 □

一般可以直接说，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$。考虑设

$$\xi=(1-\theta)a+\theta b=a+\theta(b-a),\quad \theta\in(0,1)$$

因此可以说存在 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a)$$

定理 1.2.11 ◇ Cauchy 中值定理

设 f,g 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 中可微，且 $g'(x)\neq 0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

证明 首先注意到 $g(b)\neq g(a)$，否则由 Rolle 定理知存在 $g'(x)=0$。构造

$$F(x)=f(x)-f(a)-\lambda(g(x)-g(a)),\quad \lambda=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

注意到 $F(a)=F(b)=0$，由 Rolle 定理知存在 $\xi\in(a,b)$

$$F'(\xi)=f'(\xi)-\lambda g'(\xi)=0$$

□

常见导数恒等构造：

- 对于 $xf'+nf$，构造 $(x^nf)'$；
- 对于 $xf'-nf$，构造 $(x^{-n}f)'$；
- 对于 $f'+\lambda f$，构造 $(\mathrm{e}^{\lambda x}f)'$；
- 对于 $f'-\lambda f$，构造 $(\mathrm{e}^{-\lambda x}f)'$；
- 重点：对于 $(f')^2+f\cdot f''$，构造 $(f\cdot f')'$；
- 重点：对于 f'/f，构造 $\ln f$；

以上导数公式大多可以通过微分方程凑得，不必强记。

1.2.7 Taylor 公式

假设函数 f 在 x_0 处 n 阶可导，定义其在 x_0 处的 n 阶 Taylor 多项式定义为

$$P_n(x;x_0,f)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

当 $x_0=0$ 时，即为 Maclaurin 公式。

定理 1.2.12 ◇ Peano 型余项

存在 $\delta > 0$ 使得对 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 有

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x), \quad r_n(x) = o((x - x_n)^n), \quad x \to x_0$$

证明 我们可以通过洛 n 次证明。略。 □

定理 1.2.13 ◇ Lagrange 型余项

存在 $\delta > 0$，设 f 在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上连续并 $n + 1$ 阶可导，则对任意的 x 都存在 ξ 有

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x), \quad r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

证明 固定 x，构造辅助函数

$$G(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x - t)^k$$

并任意的取在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上连续可导的函数 $H(t)$，且 $H(x) = 0$。存在 $\xi \in (x_0, x_0 + \delta)$ 满足

$$\frac{G(x_0)}{H(x_0)} = \frac{G(x) - G(x_0)}{H(x) - H(x_0)} = \frac{G'(\xi)}{H'(\xi)} = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!H'(\xi)}(x - \xi)^n$$

即

$$G(x_0) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!H'(\xi)}(x - \xi)^n H(x_0)$$

取 $H(t) = (x - t)^{n+1}$ 即证。 □

定理 1.2.14 ◇ Cauchy 型余项

存在 $\delta > 0$，设 f 在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上连续并 $n + 1$ 阶可导，则对任意的 x 都存在 ξ 有

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x), \quad r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n(x - x_0)$$

证明 在上一个证明中取 $H(t) = x - t$ 即可。 □

常见 Taylor 展开:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + O(x^6)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + O(x^8)$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + O(x^8)$$

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + O(x^6)$$

奇奇怪怪的 Taylor 展开:

$$
\begin{aligned}
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + O(x^7) \\
\sqrt{x+1} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \frac{7x^5}{256} + O(x^6) \\
\ln(x+\sqrt{1+x^2}) &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112} + O(x^9) \\
\arcsin x &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + O(x^9) \\
\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + O(x^7) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + O(x^9) \\
\sqrt[x]{1+x} &= \mathrm{e}x - \frac{\mathrm{e}x}{2} + \frac{11\mathrm{e}x^2}{24} - \frac{7\mathrm{e}x^3}{16} + O(x^4)
\end{aligned}
$$

对于其他的函数，可以转化为已知函数，比如 $x^x = \mathrm{e}^{x\ln x}$ 和 $a^x = \mathrm{e}^{x\ln a}$。

1.3 一元函数积分学

1.3.1 大纲要求

1. 理解原函数的概念，理解不定积分和定积分的概念。

2. 掌握不定积分的基本公式，掌握不定积分和定积分的性质及定积分中值定理，掌握换元积分法与分部积分法。

3. 会求有理函数、三角函数有理式和简单无理函数的积分。

4. 理解积分上限的函数，会求它的导数，掌握牛顿-莱布尼茨公式。

5. 理解反常积分的概念，了解反常积分收敛的比较判别法，会计算反常积分。

6. 掌握用定积分表达和计算一些几何量与物理量（平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、功、引力、压力、质心、形心等）及函数的平均值。

1.3.2 不定积分

笔记 不定积分可能含有奇点，不连续的段应当分别计算。比如

$$
\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x}
$$

就应当在 $\frac{\pi}{2}$ 两侧分别计算。

定理 1.3.1 ◇ 第一类换元积分法

设 $f(u)$ 具有原函数，$u=\varphi(x)$ 可导，则有换元公式

$$
\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=\varphi(x)}
$$

定理 1.3.2 ◇ 第二类换元积分法

设 $x=\psi(t)$ 是单调的可导函数，并且 $\psi'(t)\neq 0$。又设 $f(\psi(t))\psi'(t)$ 具有原函数，则有换元公式

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\left[\int f(\psi(t))\psi'(t)\,\mathrm{d}t\right]_{\psi(t)=x}$$

有理分式积分：拆开分母，待定系数分子，拆的好分即可。

根式积分：

- 遇到有理分式，拆开分母，待定分子系数。
- 遇到 $\sqrt[n]{ax+b}$，则令 $t=\sqrt[n]{ax+b}$。
- 遇到 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$，则令 $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$。
- 遇到 $\sqrt{a^2-x^2}$，则设 $x=a\sin t$ 或 $x=a\cos t$。
- 遇到 $\sqrt{a^2+x^2}$，则设 $x=a\tan t$。
- 遇到 $\sqrt{x^2-a^2}$，则设 $x=a\sec t=\frac{a}{\cos t}$。

分部积分法：

$$\int uv'\,\mathrm{d}x=uv-\int u'v\,\mathrm{d}x$$

可以把常见的几类初等函数按复杂程度排序：反三角、对数、幂函数、三角函数、指数函数，一般使用复杂的做 u，简单的做 v'。

1.3.3 不定积分表

以下是一些常见函数的原函数

$$\begin{aligned}
\int x^m\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{m+1}x^{m+1},\quad m\neq 1\\
\int x^{-1}\,\mathrm{d}x&=\ln|x|\\
\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x&=\arctan x\\
\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\\
\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x&=\ln(x+\sqrt{1+x^2})\\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x&=\arcsin x
\end{aligned}$$

请注意恒等变换，不同形式的结果可能本质相同

$$\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\tan x}{1-\tan x}$$

双曲三角函数

$$\sinh x=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2},\quad \cosh x=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2},\quad \tanh=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$$

和反双曲三角函数

$$\operatorname{arcsinh} x=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),\quad \operatorname{arccosh} x=\ln(x+\sqrt{x^2-1}),\quad \operatorname{arctanh} x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

我们这里列一些组合的。

例 1.3.3 ◇ 有理式

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right|$$
$$\int \frac{1}{x^2(x+a)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\ln\left|1+\frac{a}{x}\right| - \frac{1}{ax}$$
$$\int \frac{1}{x(x^2+a)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x^2}{x^2+a}\right|$$

例 1.3.4 ◇ 带 $a^2 \pm x^2$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$$
$$\int \frac{1}{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arctanh}\frac{x}{a}$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a}$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arcsinh}\frac{x}{a}$$
$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2\pm x^2}}\,\mathrm{d}x = \pm\sqrt{a^2\pm x^2}$$
$$\int \frac{1}{(a^2\pm x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2\pm a^2}}$$
$$\int \frac{x}{(a^2\pm x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = \mp\frac{x}{a^2\sqrt{x^2\pm a^2}}$$
$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

例 1.3.5 ◇ 根式

$$\int x\sqrt{x+a}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{15}(3x-2a)(x+a)^{\frac{3}{2}}$$
$$\int \frac{x}{\sqrt{x+a}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(x-2a)\sqrt{x+a}$$
$$\int \frac{1}{x\sqrt{x+a}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}\right|,\quad a>0$$
$$\int \frac{1}{x\sqrt{x-a}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{a}}\arctan\sqrt{\frac{x}{a}-1},\quad a>0$$
$$\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2},\quad a>0$$
$$\int \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2+x^2},\quad a>0$$
$$\int \frac{\sqrt{x+a}}{x}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x+a} + a\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+a}}$$

例 1.3.6 ◇ 三角函数

$$\int \tan x \,\mathrm{d}x = -\ln(\cos x)$$
$$\int \frac{1}{\sin x} \,\mathrm{d}x = \ln \tan \frac{x}{2}$$
$$\int \frac{1}{\cos x} \,\mathrm{d}x = \ln \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

1.3.4 定积分

定理 1.3.7

假设函数 $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ 连续可导，且 $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$，则对任意的 $[a, b]$ 上的可积函数 f 有 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 可积，且

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) \,\mathrm{d}t$$

假如 φ 严格单调，则有

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) \,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) \,\mathrm{d}t$$

定理 1.3.8 ◇ Wallis 公式

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \,\mathrm{d}x = \frac{n-2}{n} I_{n-2}$$

其中 $I_0 = \frac{\pi}{2}, I_1 = 1$。用双阶乘记之

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}, \quad I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \sim \sqrt{\pi(n+1)}$$

证明 使用分部积分法

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \,\mathrm{d}(-\cos x) \\ &= \left(-\sin^{n-1} x \cos x\right)_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,\mathrm{d}(\sin^{n-1} x) \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x \,\mathrm{d}x \\ &= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \end{aligned}$$

从而 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$。 □

1.3.5 反常积分

反常积分的定义分为两种，一种是在无穷区间上的反常积分

$$I(f) = \int_a^{+\infty} f(t) \,\mathrm{d}t = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t) \,\mathrm{d}t$$

另一种是在无界函数上的反常积分，其发散到无穷的点称为瑕点。

定理 1.3.9 ◇ 比较判别法

如果 $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$。若 $I(f)$ 发散则 $I(g)$ 发散。若 $I(g)$ 收敛则 $I(f)$ 收敛。
对于极限形式

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K \geqslant 0$$

若 $K = 0$ 且 $I(g)$ 收敛则 $I(f)$ 收敛。若 $K = +\infty$ 且 $I(g)$ 发散则 $I(f)$ 发散。若 K 为正实数，则 $I(f)$ 收敛是 $I(g)$ 收敛的充要条件。

证明 非极限形式易证。对于极限形式，若 K 是正实数，则存在 a_1 使得对 $x > a_1$ 有

$$\frac{K}{2} g(x) \leqslant f(x) \leqslant \frac{3K}{2} g(x)$$

成立，套用非极限形式即证。 □

定理 1.3.10 ◇ Cauchy 判别法

假定 $a > 0$，若

$$f(x) \leqslant \frac{K}{x^p}, \quad K > 0, p > 1$$

则 $I(f)$ 收敛。若

$$f(x) \geqslant \frac{K}{x^p}, \quad K > 0, p \leqslant 1$$

则 $I(f)$ 发散。
极限形式：若

$$\lim_{x \to +\infty} x^p f(x) = K \geqslant 0$$

当 K 是非负实数且 $p > 1$ 时收敛。当 K 是正实数或 $+\infty$ 且 $p \leqslant 1$ 时 $I(f)$ 发散。

证明 在比较判别法中取 $g = x^{-p}$ 即可。 □

常见反常积分

积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \begin{cases} \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^{\infty}, & p \neq 1 \\ \ln x|_1^{\infty}, & p = 1 \end{cases}$$

在 $p \leqslant 1$ 时发散，$p > 1$ 时收敛。积分

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln^p x} = \begin{cases} \left.\frac{\ln^{1-p} x}{1-p}\right|_2^{\infty}, & p \neq 1 \\ \ln \ln x|_2^{\infty}, & p = 1 \end{cases}$$

在 $p \leqslant 1$ 时发散，$p > 1$ 时收敛。

1.3.6 积分的应用

曲线围成的面积

曲线 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上围成的曲边梯形面积

$$S = \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x$$

曲线 $r = r(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上围成的曲边扇形的面积

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r_{\theta}^{2}\,\mathrm{d}\theta$$

平面曲线的弧长

当曲线由 $x = x(t), y = y(t)$ 决定时，且 x, y 在 $t \in [a, b]$ 上具有连续导数且不同时为 0 时，弧长

$$s = \int_{a}^{b} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$$

当曲线由方程 $y = f(x)$ 给出时，且 f 在 $[a, b]$ 上具有连续导数时，弧长

$$s = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

当曲线由 $r = r(\theta)$，且 r 在 $[a, b]$ 上具有连续导数时，弧长

$$s = \int_{a}^{b} \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta$$

旋转体的体积

如果旋转体是 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的曲边梯形，则其绕 x 轴旋转的体积为

$$V_x = \pi\int_{a}^{b} [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

如果绕 y 轴旋转，则

$$V_y = 2\pi\int_{a}^{b} xf(x)\,\mathrm{d}x$$

假如曲线绕直线 $y = \tan\theta x = kx$ 进行旋转，则高度应当是

$$d = |x\cos\theta - y\sin\theta|$$

小矩形的宽度为增量在直线上的投影

$$(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)\cdot(\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta\,\mathrm{d}x + \sin\theta\,\mathrm{d}y$$

故

$$V_x = \pi\int_{a}^{b} |x\cos\theta - y\sin\theta|^2(\cos\theta\,\mathrm{d}x + \sin\theta\,\mathrm{d}y) = \pi\int_{a}^{b} \frac{|yk - x|^2}{(k^2+1)^{\frac{3}{2}}}(y'k+1)\,\mathrm{d}x$$

旋转体的侧面积

如果旋转体是 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的曲边梯形，则其绕 x 轴旋转的侧面积为

$$A = \int 2\pi f(x)\,\mathrm{d}s = 2\pi\int_{a}^{b} f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

1.4 向量代数和空间解析几何

1.4.1 大纲要求

1. 理解空间直角坐标系，理解向量的概念及其表示。

2. 掌握向量的运算（线性运算、数量积、向量积、混合积），了解两个向量垂直、平行的条件。

3. 理解单位向量、方向数与方向余弦、向量的坐标表达式，掌握用坐标表达式进行向量运算的方法。

4. 掌握平面方程和直线方程及其求法。

5. 会求平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的夹角，并会利用平面、直线的相互关系（平行、垂直、相交等））解决有关问题。

6. 会求点到直线以及点到平面的距离。

7. 了解曲面方程和空间曲线方程的概念。

8. 了解常用二次曲面的方程及其图形，会求简单的柱面和旋转曲面的方程。

9. 了解空间曲线的参数方程和一般方程。了解空间曲线在坐标平面上的投影，并会求该投影曲线的方程。

1.4.2 向量运算

叉积的性质

- 反交换律：$a \times b = -b \times a$;
- 分配律 $c \times (a+b) = c \times a + c \times b$。

混合积的性质：

- $(a \times b) \cdot c = (b \times c) \cdot a = (c \times a) \cdot b$;
- $(a \times b) \cdot c = a \cdot (b \times c)$;
- $(a \times b) \cdot c = 0 \Leftrightarrow a, b, c$ 共面。

混合积的坐标形式：

$$[abc] = (a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

两向量平行的条件：假设 $a \neq 0$，则 b 平行于 a 的充要条件即

- 存在唯一的实数 λ 使得 $b = \lambda a$;
- 向量 a, b 线性相关；
- $a \times b = 0$。

两向量垂直的条件：假设 $a \neq 0$，则 b 垂直于 a 的充要条件为 $a \cdot b = 0$。

1.4.3 平面与直线

平面方程

点法式：给定法向量 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$，和其上的一点 $M(x_0, y_0, z_0)$，则平面方程为

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

一般式：

$$\pi_1(x, y, z) = Ax + By + Cz + D = 0$$

其法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$。

三点式

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \end{vmatrix}=0$$

截距式

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

直线方程

一般式:

$$\pi_1(x,y,z)=\pi_2(x,y,z)=0$$

即两个平面的交点。该直线的方向向量为 $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$。

点向式：若给定直线的方向向量 $\boldsymbol{\tau}=(D,E,F)$ 和其上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，则方程为

$$\frac{x-x_0}{D}=\frac{y-y_0}{E}=\frac{z-z_0}{F}$$

其方向向量为 $\boldsymbol{\tau}=(D,E,F)$。约定分母为零则分子为 0。

两点式:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

参数形式：令

$$\frac{x-x_0}{D}=\frac{y-y_0}{E}=\frac{z-z_0}{F}=t$$

则得到

$$x=x_0+Dt,\quad y=y_0+Et,\quad z=z_0+Ft$$

过直线 L 的全体平面束，若直线表现为两平面交线（即一般式）$\pi_1\cap\pi_2$，则平面束方程为

$$\pi_1(x,y,z)+\lambda\pi_2(x,y,z)=0,\quad \lambda\in\mathbb{R}^*$$

其他形式则很容易构造两个平面转化为一般式。

如果直线 L_1 与直线 L_2,L_3 都垂直，则方向向量可以取 $\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{n}_2\times\boldsymbol{n}_3$。

平面与直线的夹角

由余弦定理知

$$\cos\langle n_1,n_2\rangle=\frac{|n_1\cdot n_2|}{|n_1||n_2|}$$

- 平面与平面：即法向量的夹角 $\cos\varphi=\cos\langle n_1,n_2\rangle$。
- 直线与直线：即方向向量的夹角 $\cos\varphi=\cos\langle \tau_1,\tau_2\rangle$。
- 平面与直线：不太一样 $\sin\varphi=\cos\langle n_1,\tau_1\rangle$。

距离公式

点到平面：点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 到直线 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离公式为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

平行平面：两个平行平面 $Ax + By + Cz + D_{1,2} = 0$ 的距离公式

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

也可以随便代入一个点，算点到平面的距离。

点到直线：设 P 是直线外一点，M 是直线上任意一点，且直线的方向向量为 τ，则距离为

$$d = \frac{|\overrightarrow{PM} \times \tau|}{|\tau|}$$

异面直线：设两条直线的方向向量为 τ_1, τ_2，并分别选一点 P_1, P_2，则距离为

$$d = \frac{|(\tau_1 \times \tau_2) \cdot \overrightarrow{P_1P_2}|}{|\tau_1 \times \tau_2|}$$

空间曲面与曲面

空间曲面可以表示为 $F(x, y, z) = 0$ 的三维方程。

曲线的一般方程：表示为两个曲面的交集，即 $F_1(x, y, z) = F_2(x, y, z) = 0$。

空间曲线的参数方程：即也表示为参数方程 $x(t), y(t), z(t)$。

投影曲线：比如对一般方程 $F_1 = F_2 = 0$ 在 xOy 轴进行投影，则消去 z 得到 $H(x, y)$，其就是投影曲线。

1.5 多元函数微分学

1.5.1 大纲要求

1. 理解多元函数的概念，理解二元函数的几何意义。

2. 了解二元函数的极限与连续的概念以及有界闭区域上连续函数的性质。

3. 理解多元函数偏导数和全微分的概念，会求全微分，了解全微分存在的必要条件和充分条件，了解全微分形式的不变性。

4. 理解方向导数与梯度的概念，并掌握其计算方法。

5. 掌握多元复合函数一阶、二阶偏导数的求法。

6. 了解隐函数存在定理，会求多元隐函数的偏导数。

7. 了解空间曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念，会求它们的方程。

8. 了解二元函数的二阶泰勒公式。

9. 理解多元函数极值和条件极值的概念，掌握多元函数极值存在的必要条件，了解二元函数极值存在的充分条件，会求二元函数的极值，会用拉格朗日乘数法求条件极值，会求简单多元函数的最大值和最小值，并会解决一些简单的应用问题。

1.5.2 多元函数的微分

我们可以定义球邻域、方邻域

$$\mathbb{B}^n(\boldsymbol{x},r)=\{\boldsymbol{y}\mid|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|<r\},\quad \mathbb{O}^n(\boldsymbol{a},r)=\{\boldsymbol{x}\mid|x_i-a_i|<r,1\leqslant i\leqslant n\}$$

由于

$$\mathbb{B}^n(\boldsymbol{a},r)\subset\mathbb{O}^n(\boldsymbol{a},r)\subset\mathbb{B}^n(\boldsymbol{a},r\sqrt{n})$$

我们可以不加区分的统称为邻域，记作 $U(\boldsymbol{a},r)$。多元函数的极限概念便在其邻域上定义。

如果对于任给的 $\delta>0$，点 $\boldsymbol{a}$ 的去心邻域 $U^\circ(\boldsymbol{a},\delta)$ 内总有平面点集 D 中的点，则称 $\boldsymbol{a}$ 为 D 的聚点。

定义 1.5.1 ◇ 多元函数的极限

设 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上的函数 f，对于其上的聚点 $\boldsymbol{a}$ 和常数 A，如果对任意 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta>0$ 使得当 $\boldsymbol{x}\in U^\circ(\boldsymbol{a},\delta)\cap D$ 有

$$|f(\boldsymbol{x})-A|<\varepsilon$$

成立，则称 f 在 D 上当 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}$ 时以 A 为极限，或者称为 n 重极限，记作

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})=A$$

定义 1.5.2 ◇ 多元函数的连续性

设 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上的函数 f，对于其上聚点 $\boldsymbol{a}$，若

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{a})$$

成立，则称 f 在点 $\boldsymbol{a}$ 处连续。

定义 1.5.3 ◇ 二元函数的偏导数

设函数 $z=f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 的邻域内有定义，若极限

$$\lim_{\Delta x}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为 z 在 P 处对 x 的偏导数，记作 $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)$ 或者 $f'_x(x_0,y_0)$。类似的可以定义对 y 的偏导数。

定义 1.5.4 ◇ 全微分

设 n 元函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{a}$ 的邻域内有定义，若存在 n 维向量 $\boldsymbol{b}$ 使得

$$\lim_{\Delta\boldsymbol{x}\to0}\frac{f(\boldsymbol{a}+\Delta\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{a})-\boldsymbol{b}\cdot\Delta\boldsymbol{x}}{|\Delta\boldsymbol{x}|}=0$$

成立则称 f 在 $\boldsymbol{a}$ 处可微，向量 $\boldsymbol{b}$ 为函数 f 在 $\boldsymbol{a}$ 处的导数，记为 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}$ 并记微分（全微分）为 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}=\boldsymbol{b}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}$。

定义 1.5.5 ◇ 方向导数

设 n 元函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{a}$ 的邻域内有定义，考虑一单位向量 $\boldsymbol{\mu}$，如果极限

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{a})=\lim_{t\to 0+}\frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{\mu})-f(\boldsymbol{a})}{t}$$

存在，则称函数 f 在 $\boldsymbol{a}$ 处沿着方向 $\boldsymbol{\mu}$ 是方向可导的，并称该极限为函数 f 在 $\boldsymbol{a}$ 处沿着 $\boldsymbol{\mu}$ 的方向导数。

假如 f 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处的偏导数存在，函数 f 在 P_0 处的梯度为

$$\operatorname{grad} f(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)\boldsymbol{i}+f'_y(x_0,y_0)\boldsymbol{j}$$

显然当函数 f 可微时，$\nabla f(x_0,y_0)=\boldsymbol{f}'(x_0,y_0)$，且

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\mu}}(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)\cdot\boldsymbol{\mu}$$

对于下列命题:

- Q_1 : 如果 f 在 $\boldsymbol{a}$ 处的偏导数存在且连续;
- Q_2 : 函数 f 在 $\boldsymbol{a}$ 点可微;
- Q_3 : 函数 f 在 $\boldsymbol{a}$ 点连续;
- Q_4 : 函数 f 在 $\boldsymbol{a}$ 点极限存在;
- Q_5 : 函数 f 在 $\boldsymbol{a}$ 点偏导数存在;
- Q_6 : 函数 f 在 $\boldsymbol{a}$ 点任意方向的方向导数存在。

则他们的关系为

$$Q_1\Rightarrow Q_2\Rightarrow Q_3\Rightarrow Q_4,\quad Q_2\Rightarrow Q_5,\quad Q_2\Rightarrow Q_6$$

一些反例

- $Q_1\not\Leftarrow Q_2$: 考虑一元时的经典反例 $(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$，其在原点处可微但偏导数不连续。
- $Q_5\not\Leftarrow Q_3+Q_6$: 考虑圆锥 $\sqrt{x^2+y^2}$，其在原点处可微、任意方向导数存在，但偏导数不存在。
- $Q_4\not\Leftarrow Q_5+Q_6$: 考虑 $\frac{xy}{x^2+y^2}$，其在原点处任意方向导数存在、偏导数存在，但极限不存在。
- $Q_2\not\Leftarrow Q_3+Q_5+Q_6$: 考虑 $\sqrt{|xy|}$，其在原点处连续、偏导数存在,。

1.5.3 多元微分学的几何应用

对于空间曲线 $\Gamma:\boldsymbol{f}(t)=(\varphi,\psi,\omega)$，向量 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{f}'(t_0)=(\varphi',\psi',\omega')$ 称为曲线 Γ 在点 $\boldsymbol{f}(t_0)$ 处的一个切向量，从而曲线 Γ 在点 $\boldsymbol{f}(t_0)$ 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\varphi(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega(t_0)}$$

通过点 $\boldsymbol{f}(t_0)$ 且与切线垂直的平面称为 Γ 在点 M 处的法平面，其法向量是 $\boldsymbol{s}$，其方程为

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$$

对于空间曲面 $\Sigma:F(x,y,z)=0$，$M(x_0,y_0,z_0)$ 是曲面 Σ 上一点，向量 $\boldsymbol{n}=(F'_x,F'_y,F'_z)$ 是曲面 Σ 在点 M 的切平面的一个法向量，该切平面的方程为

$$F'_x(M)(x-x_0)+F'_y(M)(y-y_0)+F'_z(M)(z-z_0)=0$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x'(M)}=\frac{y-y_0}{F_y'(M)}=\frac{z-z_0}{F_z'(M)}$$

1.5.4　极值问题

无条件极值

那么对于二元函数 f，设 (x_0,y_0) 为其驻点，引入记号

$$\Delta(x_0,y_0)=(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)(x_0,y_0)$$

则有如下结论:

- 如果 $\Delta>0$，则当 $f_{xx}>0$ 时为严格极小值；$f_{xx}<0$ 为严格极大值。
- 如果 $\Delta<0$，不是极值。
- 如果 $\Delta=0$ 无法判断，可能有可能没有。

有条件极值

Lagrange 乘数法：要找函数 $z=f(x,y)$ 在 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值点，可以先做函数

$$L(x,y)=f(x,y)=\lambda\varphi(x,y)$$

联立

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=f_x'(x,y)+\lambda\varphi_x'(x,y)=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}=f_y'(x,y)+\lambda\varphi_y'(x,y)=0\\ \varphi(x,y)=0\end{cases}$$

该方程解出的 x,y,λ 中的 (x,y) 即是全部可能极值点。

二元函数的二阶 Taylor 公式

定理 1.5.6

设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的邻域内且有连续 3 阶偏导数，(x_0+h,y_0+k) 为此邻域内任一点，令

$$D_{h,k}=h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}$$

则有

$$\begin{aligned}f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)&+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)\\&+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f(x_0,y_0)\\&+\frac{1}{3}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)\quad\theta\in(0,1)\end{aligned}$$

一般的，记号

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f=\sum_{p=0}^{m}\binom{m}{k}h^pk^{m-p}\frac{\partial^m f}{\partial x^p\,\partial y^{m-p}}$$

1.6 多元函数积分学

1.6.1 大纲要求

1. 理解二重积分、三重积分的概念，了解重积分的性质,，了解二重积分的中值定理。

2. 掌握二重积分的计算方法（直角坐标、极坐标），会计算三重积分（直角坐标、柱面坐标、球面坐标）。

3. 理解两类曲线积分的概念，了解两类曲线积分的性质及两类曲线积分的关系。

4. 掌握计算两类曲线积分的方法。

5. 掌握格林公式并会运用平面曲线积分与路径无关的条件，会求二元函数全微分的原函数。

6. 了解两类曲面积分的概念、性质及两类曲面积分的关系，掌握计算两类曲面积分的方法，掌握用高斯公式计算曲面积分的方法，并会用斯托克斯公式计算曲线积分。

7. 了解散度与旋度的概念，并会计算。

8. 会用重积分、曲线积分及曲面积分求一些几何量与物理量（平面图形的面积、体积、曲面面积、弧长、质量、质心、形心、转动惯量、引力、功及流量等）。

1.6.2 重积分

二重积分可以考虑按 x 轴分划或者按 y 轴分划，化而二重积分为二次积分。比如对 x 分划

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

也可以用极坐标系转换 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，转化为

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

三重积分可以考虑划分成“先重后单”或者“先单后重”的积分，比如

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

也可以考虑柱坐标系 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$，则

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \iiint_\Omega F(r,\theta,z) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

也可以考虑球面坐标系

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \qquad \iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \iiint_\Omega F(r,\varphi,\theta) r^2 \sin\varphi\,\mathrm{d}r\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

笔记 特别注意极坐标下 r 是函数，不是定值！遇到很规整的重积分时，注意看能不能用轮换对称性！

1.6.3 曲线积分

设 $L \subset R^3$ 是一条可求长的连续曲线，起点终点分别为 A 和 B。L 的分割 $\|T\|$ 是指 L 上的有序有限点列

$$A = P_0 \to P_1 \to \cdots P_n = B$$

令

$$\Delta_s = \left|\widehat{P_{i-1}P_i}\right|, \quad \|T\| = \max_{i=1}^{n} \Delta s_i$$

定义 1.6.1 ◇ 第一型曲线积分

给定的 f 是定义在曲线弧 L 上的有界函数。对 L 做分割 $\boldsymbol{T}$ 并求和

$$\sum_{i=1}^{n} f(T_i)\Delta s_i$$

如果 $\|\boldsymbol{T}\| \to 0$ 时，$S(f, \boldsymbol{T})$ 存在极限且和分割 $\boldsymbol{T}$ 无关，称该极限

$$\int_L f\,\mathrm{d}s = \int_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \lim_{\|T\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(T_i)\Delta s_i$$

为函数 f 在曲线 L 上的第一型曲线积分。此时称 f 为被积函数而 L 称为积分路径。

定义 1.6.2 ◇ 第二型曲线积分

设 $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$ 是一向量值函数，定义其沿着曲线 L 的第二型曲线积分为

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}s = \int_L (P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma)\,\mathrm{d}s$$

其中 $\mathrm{d}s$ 是 L 的弧微元。定义弧微元向量

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}s = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$$

从而可以记成

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$

曲线积分的计算

如果是第一型曲线积分 $f\,\mathrm{d}s$:

- 如果有 $x(t), y(t)$，考虑依据 $\sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$ 投影。
- 如果有 $y = y(x)$，考虑转换为 $\sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$ 投影。
- 如果是 $r = r(\theta)$，考虑转换为 $\sqrt{r^2 + r'^2}\,\mathrm{d}\theta$ 投影。

如果是第二型曲线积分 $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$:

- 考虑对曲线参数化，带入变成一重积分。
- 考虑法向量。
- 考虑格林公式，化为区域上的重积分。

1.6.4　曲面积分

假设 Σ 是可求面积的连续曲面，分割 $\boldsymbol{T}$ 是用坐标曲线网将 Σ 分成的 n 个小曲面。令

$$\Delta S_i = |\Sigma_i|, \quad \|\boldsymbol{T}\| = \max_{i=1}^{n} \Delta S_i$$

定义 1.6.3 ◇ 第一型曲面积分

给定的 f 是定义在 Σ 上的有界函数。对 Σ 做分割 $\boldsymbol{T}$ 并求和

$$S(f,\boldsymbol{T}) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i$$

如果 $\|\boldsymbol{T}\| \to 0$ 时，$S(f,\boldsymbol{T})$ 存在极限且和分割 $\boldsymbol{T}$ 无关，称该极限

$$\iint_{\Sigma} f \,\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \lim_{\|T\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i$$

为函数 f 在曲线 Σ 上的第一型曲面积分。此时称 f 为被积函数而 Σ 称为积分曲面。

定义 1.6.4 ◇ 第二型曲面积分

设 $\boldsymbol{F} = (P,Q,R)$ 是一向量值函数，定义其沿着曲面 L 的第二型曲面积分为

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}s = \int_L (P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma)\,\mathrm{d}s$$

其中 $\mathrm{d}s$ 是 L 的弧微元。定义弧微元向量

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}s = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$$

从而可以记成

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$

特别的，若 $z = z(x,y)$，则法向量

$$\boldsymbol{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}(-z_x, z_y, 1)$$

曲面积分的计算

如果是第一型曲面积分 $f\,\mathrm{d}S$：

- 如果有 $z = z(x,y)$，考虑依据 $\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 投影。
- 如果有 $F(x,y,z) = 0$，考虑求出 z_x, z_y，转换为上面的情况。
- 考虑斯托克公式，转化为第二型曲面积分。

如果是第二型曲面积分 $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$：

- 考虑对坐标平面进行投影，化为重积分。

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

- 考虑高斯公式，化为体积上的重积分。

1.6.5 旋度、散度

定理 1.6.5 ◇ Green 公式

假设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是由有限条光滑或分段光滑的 Jordan 曲线所围成的区域，并取 ∂D 的正向。对任何有一阶连续偏导数的 P, Q 有

$$\int_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

定理 1.6.6 ◇ Green 定理

假设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是区域且 P, Q 在 D 上连续，则下列命题等价:

- 对 D 内从 $M_1 \to M_2$ 的任意分段光滑曲线 L_1, L_2，曲线积分
$$\int_{L_1} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{L_2} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$
- 如果存在 U 使得 $\mathrm{d}U = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$，即称 $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 在 D 上是正合的，称 U 是其原函数。
- 沿着 D 内任意分段光滑闭曲线 L，有
$$\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0$$
- 恒有
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

高斯公式与散度

对于向量场

$$A(x, y, z) = (P, Q, R)$$

其中 Σ 是场中一段有向曲面，$\boldsymbol{n}$ 是曲面 Σ 在点 (x, y, z) 处的单位法向量，积分

$$\iint_\Sigma A \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$$

记为向量场 A 通过曲面 Σ 向指定侧的通量。定义散度为

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \nabla \cdot \boldsymbol{A}$$

定理 1.6.7 ◇ Gauss 公式

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是区域且边界 $\partial\Omega$ 是由分段光滑的定向曲面构成。对于向量场 $A = (P, Q, R)$ 是一阶导数连续的，则

$$\iint_{\partial\Omega} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

也可记为

$$\iint_{\partial\Omega} A \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \iiint_\Omega \operatorname{div} A\,\mathrm{d}V$$

斯托克公式与旋度

对于向量场

$$A(x,y,z)=(P,Q,R)$$

Γ 是一条有向闭曲线，$\boldsymbol{\tau}$ 是曲线 Γ 在点 (x,y,z) 处的单位切向量，积分

$$\oint_{\Gamma} A\cdot\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}s$$

记为向量场 A 沿有向闭曲线 Γ 的环流量。定义旋度为

$$\operatorname{rot} A=(R_y-Q_z,P_z-R_x,Q_x-P_y)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

定理 1.6.8 ⋄ Stokes 公式

设 Σ 是光滑定向曲面且边界 $\partial\Sigma$ 为分段光滑闭曲线，取诱导定向。对其上具有一阶连续偏导数的函数 P,Q,R 有

$$\int_{\partial\Sigma} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

也可记为

$$\int_{\partial\Sigma} A\cdot\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}s=\iint_{\Sigma}\operatorname{rot} A\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$$

1.6.6 多元积分的应用

面积与体积

平面区域 D 的面积等于 $\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，体积 $\iiint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$。

以 $f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积为 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$。

曲面的表面积：对于曲面 $S:z=f(x,y)$，D_{xy} 为其在 xOy 面上的投影区域，则曲面的面积公式为

$$A=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+[f'_x(x,y)]^2+[f'_y(x,y)]^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

形心与质心

对于平面 D 上的薄片，其面密度为 $\rho(x,y)$，其质量为

$$M=\iint_D \rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

则质心坐标公式为

$$\overline{x}=\frac{1}{M}\iint_D x\rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma,\quad \overline{y}=\frac{1}{M}\iint_D y\rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

类似的，对于空间 Ω 上物体，其体密度为 $\rho(x,y,z)$，其质量为

$$M=\iiint_{\Omega}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V$$

则质心坐标公式为

$$\overline{x}=\frac{1}{M}\iiint_D x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V,\quad \overline{y}=\frac{1}{M}\iiint_D y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V,\quad \overline{z}=\frac{1}{M}\iiint_D z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V$$

转动惯量

对于平面 D 上的薄片，其面密度为 $\rho(x,y)$，令 $d(x,y)$ 为上面任何一点到转动轴的距离，则

$$I=\iint_D d^2\rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

对于空间 Ω 上的物体，其体密度为 $\rho(x,y,z)$，令 $d(x,y,z)$ 为上面任何一点到转动轴的距离，则

$$I=\iiint_\Omega d^2\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V$$

1.7 无穷级数

1.7.1 大纲要求

1. 理解常数项级数收敛、发散以及收敛级数的和的概念，掌握级数的基本性质及收敛的必要条件。
2. 掌握几何级数与 p 级数的收敛与发散的条件。
3. 掌握正项级数收敛性的比较判别法、比值判别法、根值判别法，会用积分判别法。
4. 掌握交错级数的莱布尼茨判别法。
5. 了解任意项级数绝对收敛与条件收敛的概念以及绝对收敛与收敛的关系。
6. 了解函数项级数的收敛域及和函数的概念。
7. 理解幂级数收敛半径的概念，并掌握幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域的求法。
8. 了解幂级数在其收敛区间内的基本性质（和函数的连续性、逐项求导和逐项积分），会求一些幂级数在收敛区间内的和函数，并会由此求出某些数项级数的和。
9. 了解函数展开为泰勒级数的充分必要条件。
10. 掌握 e^x，$\sin x$，$\cos x$，$\ln(1+x)$ 及 $(1+x)^\alpha$ 的的麦克劳林（Maclaurin）展开式，会用它们将一些简单函数间接展开为幂级数。
11. 了解傅里叶级数的概念和狄利克雷收敛定理，会将定义在 $[-l,l]$ 上的函数展开为傅里叶级数，会将定义在 $[0,l]$ 上的函数展开为正弦级数与余弦级数，会写出傅里叶级数的和函数的表达式。

1.7.2 收敛判别法

重要级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

当 $p>1$ 时收敛。

重要级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p(\ln n)^q}$$

当 $p>1$ 时、$p=1,q>1$ 时收敛。

级数收敛一般感觉一下，都能感觉出来。但还是有一些反常的，摘录如下。

- 若 $\lim\frac{a_n}{b_n}=1$，且 $\sum b_n$ 收敛，则 $\sum a_n$ 收敛。
- 考虑 $b_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},a_n=b_n+\frac{1}{n}$。
- 若正项级数 a_n 单调减少且 $\lim na_n=0$，则 $\sum a_n$ 收敛。考虑 $a_n=\frac{1}{n\ln n}$。
- 考虑 $b_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},a_n=b_n+\frac{1}{n}$。
- 若级数 $\sum a_n$ 收敛，则级数 $\sum a_n^2$ 收敛。

- 考虑 $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$。

一些求和技巧：知乎：常数项级数求和总结。

1.7.3 幂级数

对于幂级数 $\sum f_i x^i$ 或者一般项级数 $\sum u_i(x)$，计算

- 比值法：$\rho = \lim \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$。
- 根式法：$\rho = \lim \sqrt[n]{|u_n(x)|}$。

则

- 若 $0 < \rho < +\infty$ 时，$R = \frac{1}{\rho}$。
- 若 $\rho = 0$ 时，$R = +\infty$。
- 若 $\rho = \infty$ 时，$R = 0$。

常见函数的幂级数展开式

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, & x \in \mathbb{R} \\
a^x = \mathrm{e}^{x \ln a} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n, & x \in \mathbb{R} \\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, & x \in \mathbb{R} \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, & x \in \mathbb{R} \\
\frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, & x \in (-1,1) \\
\ln(1+x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, & x \in (-1,1] \\
\arctan x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, & x \in [-1,1] \\
\frac{1}{(1-x)^k} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} x^n, & x \in (-1,1)
\end{aligned}$$

1.7.4 Fourier 级数

函数列

$$1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \cdots$$

称为三角函数系，若这一列的函数记为 $\{\varphi_i(x)\}$ 则

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad \forall i \neq j$$

这个性质称为三角函数系的正交性。有限和

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

称为三角多项式，而形式和

$$a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

称为三角级数，其中 a_0,a_k,b_k 称为三角函数的系数。

定义 1.7.1 ⋄ Fourier 级数

假设 f 是一个周期为 2π 的 Riemann 可积函数，令

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x$$

其中 a_0,a_k,b_k 称为 f 的 Fourier 级数，形式和

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

称为 f 的 Fourier 级数或者 Fourier 展开。

比如

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}(-1)^{k+1}\sin kx,\qquad -\pi\leqslant x\leqslant\pi$$

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}(-1)^k\cos kx,\qquad -\pi\leqslant x\leqslant\pi$$

一般的，对于周期为 $[-l,l]$ 的函数 $f(x)$，则其 Fourier 级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

其中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x$$

1.8 常微分方程

1.8.1 大纲要求

1. 了解微分方程及其阶、解、通解、初始条件和特解等概念。
2. 掌握变量可分离的微分方程及一阶线性微分方程的解法。
3. 会解齐次微分方程、伯努利方程和全微分方程，会用简单的变量代换解某些微分方程。
4. 会用降阶法解下列形式的微分方程：$y^{(n)}=f(x)$，$y''=f(x,y')$ 和 $y''=f(y,y')$。5. 理解线性微分方程解的性质及解的结构。
6. 掌握二阶常系数齐次线性微分方程的解法，并会解某些高于二阶的常系数齐次线性微分方程。
7. 会解自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数以及它们的和与积的二阶常系数非齐次线性微分方程。
8. 会解欧拉方程。
9. 会用微分方程解决一些简单的应用问题。

1.8.2 一阶微分方程

可分离变量的微分方程

如果方程可以写成 $f(x)\,\mathrm{d}x = g(y)\,\mathrm{d}y$ 的形式，则称为可分离变量的微分方程，两边同时积分即可。

笔记 特别注意分离变量时，分母为 0 可能也有解。

齐次方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

的方程，记作齐次微分方程。做变量代换 $u = \frac{y}{x}$，有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{y}{x}\right) = \frac{g(u) - u}{x}$$

就变成变量分离的了。

USELESS!! 可能再多点变化：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

分为三种情况讨论：

1. 如果

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k$$

则比较显然。

2. 如果

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k \neq \frac{c_1}{c_2}$$

令 $u = a_2x + b_2y$，此时有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g\left(a_2 + b_2\frac{ku + c_1}{u + c_2}\right)$$

是变量分离方程。

3. 对于剩余的情况，把分子分母看成两条不相交的直线，尝试平移到原点。设交点为 $(x, y) = (x_0, y_0)$，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(y - y_0)}{\mathrm{d}(x - x_0)} = g\left(\frac{a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0)}{a_2(x - x_0) + b_2(y - y_0)}\right)$$

也变成了齐次形式。

一阶线性微分方程

一阶线性非齐次常微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x)$$

即 $P(x) = \int p(x)\,\mathrm{d}x$，注意到

$$\frac{\left(y\mathrm{e}^{P(x)}\right)'}{\mathrm{e}^{P(x)}} = y' + p(x)y = q(x)$$

可以得到 $y(x)$ 的解

$$y(x) = \mathrm{e}^{-P(x)}\left(\int \mathrm{e}^{P(x)}q(x) + C\right)$$

Bernoulli 微分方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)y+q(x)y^n,\quad n\neq 0,1$$

的方程称为 Bernoulli 微分方程。设 $y\neq 0$，得到

$$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}(y^{1-n})}{(1-n)\,\mathrm{d}x}=y^{1-n}p(x)+q(x)$$

换元 $u=y^{1-n}$ 即可。

Riccati 方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y+q(x)y^2=r(x)$$

的方程称为 Riccati 微分方程。设 $\phi(x)$ 是其一个特解，令 $u=y-\phi$，得到

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+(p+2\phi q)u+qu^2=0$$

即是一个 Bernoulli 方程。

Euler 方程

形如

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+px\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+q=r(x)$$

当 $x>0$ 时，令 $x=\mathrm{e}^u$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{x\,\mathrm{d}u},\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right)$$

因此方程化为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}u^2}+(p-1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}+qy=r(\mathrm{e}^u)$$

恰当微分方程

如果方程 $P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0$ 能写成全微分 $u(x,y)$，则通解为 $u(x,y)=C$。注意到

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial^2u}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial g}{\partial x}$$

故其是该方程为恰当微分方程的充要条件。

1.8.3 可降阶的高阶方程

一般有三类：

- $y''=f(x,y')$ 型：令 $p=y'$，方程化为 $y''=p'=f(x,p)$；
- $y''=f(y,y')$ 型：令 $p=y'$，方程化为 $y''=\frac{p\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)$；
- $y^{(n)}=f(x)$ 型：对 f 积分 n 次。

1.8.4 Gronwall 定理

考虑区间 $[a,b]$ 上的微分不等式

$$y'(x)+p(x)y(x)\leqslant f(x)$$

令 $P(x)$ 为 $p(x)$ 的原函数，类似于普通微分方程的解法，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y(x)\mathrm{e}^{P(x)}\right)=(y'(x)+p(x)y)\mathrm{e}^{P(x)}\leqslant f(x)\mathrm{e}^{P(x)}$$

选取 $u\in[a,b]$，在 $[a,u]$ 上积分得到

$$y(u)\mathrm{e}^{P(u)}-y(a)\leqslant\int_a^u f(s)\mathrm{e}^{P(s)}\,\mathrm{d}s=\mathrm{e}^{P(u)}\int_a^u f(s)\mathrm{e}^{P(s)-P(u)}\,\mathrm{d}s$$

从而得到

$$y(x)\leqslant y(a)\mathrm{e}^{-P(u)}+\int_a^u f(s)\mathrm{e}^{P(s)-P(u)}\,\mathrm{d}s$$

特殊的，令 $f\equiv0$，有

$$y(x)\leqslant y(a)\mathrm{e}^{-P(x)}$$

如果 y_1,y_2 满足如下微分不等式

$$y_1'+p(x)y_1\leqslant y_2'+p(x)y_2,\quad y_1(a)=y_2(a)$$

则一定 $y_1\equiv y_2$。

1.8.5 线性微分方程

二阶常系数齐次线性微分方程

对于方程 $y''+py'+qy=0$，求其特征方程的根 r_1,r_2，然后

- 如果是一对不等的实根，则 $y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}$；
- 如果是一对相等的实根，则 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{rx}$；
- 如果是一对共轭复根 $\alpha\pm\beta i$，则 $y=\mathrm{e}^{ax}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$；

二阶常系数非齐次线性微分方程

对于方程 $y''+py'+qy=f(x)$，求其特解：

- 若 $f(x)=P_n(x)$，则特解设为 $y^*=Q_n(x)$。
- 若 $f(x)=P_m(x)\cos bx+P_n(x)\sin bx$，则特解设为 $y^*=Q_l(x)\cos bx+R_l(x)\sin bx$。
- 若 $f(x)=\mathrm{e}^{ax}P_n(x)$，则特解设为

$$y^*=\mathrm{e}^{ax}Q_n(x)x^k$$

  其中 $0\leqslant k\leqslant2$，并与 a 和特征根重合数有关。
- 当 $f(x)=\mathrm{e}^{ax}\left(P_m(x)\cos bx+P_n(x)\sin bx\right)$ 时，设

$$y^*=\mathrm{e}^{ax}\left(Q_l(x)\cos bx+R_r(x)\sin bx\right)$$

  其中 $l=\max(n,m),0\leqslant k\leqslant1$，并与 $a\pm bi$ 和特征根重合数有关。

具体计算时，不妨增加待定系数多项式 $P_{n+2}(x)$ 的幂次，感觉一下就知道了。

第二章　线性代数

2.1　行列式

2.1.1　大纲要求

1. 了解行列式的概念，掌握行列式的性质。
2. 会应用行列式的性质和行列式按行（列）展开定理计算行列式。

2.1.2　余子式

在 n 阶行列式中，把 a_{ij} 元列所在的行列划去后

- 余子式 M_{ij}：留下来的 $n-1$ 阶行列式；
- 代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$；

定理 2.1.1

对于 n 阶行列式 $|A|$ 有

$$|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$$

前者称为 n 阶行列式按第 i 行的展开式，后者称为按第 j 列的展开式。

若对不同行列展开，比如对于 n 阶行列式 $|A|$ 的第 k,i 行展开（$k\neq i$）

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=0$$

2.1.3　常见行列式的计算技巧

行列式的一些计算技巧：知乎：八大类型行列式及其解法。

例 2.1.2

计算

1. 箭型行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ b & x_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ b & & & x_n \end{vmatrix}$$

2. 双三角型行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a \\ b & x_2 & a & \cdots & a \\ b & b & x_3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & b & x_n \end{vmatrix}$$

3. 双线式行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & \\ & a_2 & \ddots & \\ & & \ddots & b_{n-1} \\ b_n & & & a_n \end{vmatrix}$$

证明

1. 将第一列减去第 i 列的 $\frac{a}{x_i}$，从而消掉一列，故答案为

$$D_n = \begin{vmatrix} (x_1 - \frac{ab}{x_2} - \cdots - \frac{ab}{x_n}) & a & \cdots & a \\ 0 & x_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & x_n \end{vmatrix} = \left(x_1 - ab \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{x_i} \right) \prod_{i=2}^{n} x_i$$

2. 当 $a = b$ 时，可以化为箭型行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a - x_1 & x_2 - a & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a - x_1 & & & x_n - a \end{vmatrix}$$

当 $a \neq b$ 时，采用两个方向的拆行法，比较系数得到

$$D_n = \frac{1}{b-a} \left(a \prod_{i=1}^{n} (x_i - b) - b \prod_{i=1}^{n} (x_i - a) \right)$$

3. 对第一列展开即可

$$D_n = \prod_{i=1}^{n} a_i + (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^{n} b_i$$

□

2.2 矩阵

2.2.1 大纲要求

1. 理解矩阵的概念，了解单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵、三角矩阵、对称矩阵和反对称矩阵以及它们的性质。

2. 掌握矩阵的线性运算、乘法、转置以及它们的运算规律，了解方阵的幂与方阵乘积的行列式的性质。

3. 理解逆矩阵的概念，掌握逆矩阵的性质以及矩阵可逆的充分必要条件，理解伴随矩阵的概念，会用伴随矩阵求逆矩阵。

4. 理解矩阵初等变换的概念，了解初等矩阵的性质和矩阵等价的概念，理解矩阵的秩的概念，掌握用初等变换求矩阵的秩和逆矩阵的方法。

5. 了解分块矩阵及其运算。

2.2.2 矩阵

由 sn 个数排成的 s 行（横的）n 列（纵的）表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

称为一个 $s \times n$ 矩阵，记作 $A_{s\times n}$ 或 $A = (a_{ij})$，它的 (i, j) 元也记作 $A(i; j)$。

有名字的矩阵

- 零矩阵：全 0 的矩阵，记作 O;
- 对角矩阵：只有对角线上的元素非 0 的矩阵;
- 单位矩阵：主对角线上的元素为 1 的矩阵，记作 E 或 I;
- 数量矩阵：主对角线上的元素均为 k 的对角矩阵，等于 kE;
- 上三角矩阵：主对角线及以上的元素非零的矩阵;
- 下三角矩阵：主对角线及以下的元素非零的矩阵;
- 对称矩阵：满足 $A^\mathsf{T} = A$ 的矩阵;
- 反对称矩阵：满足 $A^\mathsf{T} = -A$ 的矩阵;
- 正交矩阵：满足 $A^\mathsf{T}A = E$ 的矩阵。

2.2.3 矩阵的初等变换

下面三种变换记作矩阵的初等行变换:

- $r_i \leftrightarrow r_j$：对换 i, j 两行;
- $r_i \times k$：第 i 行乘数 k;
- $r_i + kr_j$：把第 j 行的 k 倍加到 r_i 上;

把行换成列（把记号 r 换成 c）即是初等列变换。统称初等变换。

可以用初等变换把矩阵变为行阶梯型矩阵:

- 非零行在零行之上;
- 每行首个非零元的列坐标递增;

进一步的，再满足条件

- 首个非零元为 1;
- 非零元所在列其他元为 0;

则称为行最简形矩阵。

矩阵等价:

- 矩阵等价:

- 矩阵 A 能经过有限次初等变换变为 B，则称 A 与 B 等价。
- 也可以表述为存在可逆矩阵 P,Q 使得 $PAQ=B$。

- 矩阵行等价:
  - 矩阵 A 能经过有限次初等**行**变换变为 B。
  - 存在可逆矩阵 P 使得 $PA=B$。
  - 等价于 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解。
  - 矩阵行向量等价。
- 矩阵列等价:
  - 矩阵 A 能经过有限次初等**列**变换变为 B。
  - 存在可逆矩阵 Q 使得 $AQ=B$。
  - 矩阵列向量等价。

求矩阵的逆：对矩阵 $(A \mid E)$ 做初等行变换，当 A 变为 E，E 则变为 A^{-1}。
初等矩阵

- 符号 $E(i,j)=\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$，表示对调两行（列）。
- 符号 $E(i(k))=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{k} & \\ & & 1 \end{pmatrix}$，表示倍乘某行（列）。
- 符号 $E(i+j(k))=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & k \\ & & 1 \end{pmatrix}$，表示将地 j 行（列）的 k 倍加到地 i 行上。
- 矩阵左乘初等矩阵则对应行变换，右乘列变换。

2.2.4 矩阵乘法的不同视角

矩阵乘列向量

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1x_1+2x_2) \\ (3x_1+4x_2) \\ (5x_1+6x_2) \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

行向量乘矩阵

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}$$

矩阵乘矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\boldsymbol{x} & \boldsymbol{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A\boldsymbol{x} & A\boldsymbol{y}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}(1x_1+2x_2) & (1y_1+2y_2)\\ (3x_1+4x_2) & (3y_1+4y_2)\\ (5x_1+6x_2) & (5y_1+6y_2)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & y_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2 & y_2\end{pmatrix}$$

如果 $AB = C$，则

- C 的列向量组可由 A 的列向量组线性表示。
- 若 B 可逆，则 C 的列向量组和 A 的列向量组等价。
- C 的行向量组可由 B 的行向量组线性表示。
- 若 A 可逆，则 C 的行向量组和 B 的行向量组等价。

2.2.5 矩阵的性质

伴随矩阵：设矩阵 $A = (a_{ij})$，那么 A 的伴随矩阵为

$$A^* = (A_{ij})_{n\times n}^{\mathsf{T}}$$

即每行每列全为代数余子式。

矩阵的逆、伴随、转置运算可交换

$$\left(A^{-1}\right)^{\mathsf{T}} = \left(A^{\mathsf{T}}\right)^{-1}, \quad \left(A^*\right)^{\mathsf{T}} = \left(A^{\mathsf{T}}\right)^*, \quad \left(A^*\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^*$$

反向性质

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (AB)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}, \quad (AB)^* = B^*A^*$$

行列式

$$|A^{-1}| = |A|^{-1}, \quad |A^{\mathsf{T}}| = |A|, \quad |A^*| = |A|^{n-2} \quad (n \geqslant 2)$$

数乘

$$(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}, \quad kA^{\mathsf{T}} = kA^{\mathsf{T}}, \quad (kA)^* = k^{n-1}A^* \quad (n \geqslant 2)$$

方阵 A 可逆的等价命题

- $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow r(A) = n \Leftrightarrow A$ 无零特征值。
- $\Leftrightarrow Ax = 0$ 只有零解 $\Leftrightarrow$ 对于非零向量 b 有 $Ax = b$ 解唯一。
- $\Leftrightarrow A$ 的行列向量组是 $\mathbb{R}^n$ 的一个基 $\Leftrightarrow A$ 的行列向量组线性无关。
- $\Leftrightarrow A$ 可以分解为初等矩阵的乘积 $\Leftrightarrow A$ 与单位阵 E 等价。
- $\Leftrightarrow A^{\mathsf{T}}A$ 为正定矩阵。

矩阵 $A_{m\times n}$ 列满秩等价于

- $\Leftrightarrow r(A) = n \Leftrightarrow A$ 列向量组线性无关 $\Leftrightarrow Ax = 0$ 只有零解。

2.2.6 矩阵秩的性质

定理 2.2.1 ◇ Sylvester 秩不等式

设 A, B 分别是 $s\times n, n\times m$ 的矩阵，则

$$r(A)+r(B)-n\leqslant r(AB)\leqslant \min\{r(A),r(B)\}$$

证明 右侧显然。对于左侧，由于矩阵的初等行（列）变换不改变矩阵的秩，构造分块矩阵

$$n+r(AB)=r\begin{pmatrix}E_n & 0\\ 0 & AB\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}B & E_n\\ 0 & A\end{pmatrix}\geqslant r(B)+r(A)$$

□

定理 2.2.2

设 A 是一个 $s\times n$ 矩阵，且 $A\neq 0$，证明：A 可以被分解为行列向量的乘积当且仅当 $r(A)=1$

证明 由于秩为 1，因此选取 A 的一个列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，其他的列向量都可以由其表示，故 $A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathsf{T}}$。 □

定理 2.2.3

$$r(A^{\mathsf{T}}A)=r(AA^{\mathsf{T}})=r(A)$$

证明 试证 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 与 $(A^{\mathsf{T}}A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 同解。假设 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个解，显然

$$(A^{\mathsf{T}}A)\boldsymbol{x}=A^{\mathsf{T}}(A\boldsymbol{\eta})=A^{\mathsf{T}}\mathbf{0}=\mathbf{0}$$

反之，设 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $(A^{\mathsf{T}}A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个解，注意到

$$(A\boldsymbol{\eta})^{\mathsf{T}}(A\boldsymbol{\eta})=\boldsymbol{\eta}^{\mathsf{T}}((A^{\mathsf{T}}A)\boldsymbol{\eta})=0$$

即向量 $A\boldsymbol{\eta}$ 的长度为 0，故 $A\boldsymbol{\eta}=\mathbf{0}$。 □

定理 2.2.4

若 n 级矩阵 A, B 满足 $(A-aE)(A-bE)=O$ 且 $a\neq b$，证明：$r(A-aE)+r(A-bE)=n$。

证明 一方面

$$r(A-aE)+r(A-bE)\leqslant r(O)+n=n$$

另一方面

$$r(A-aE)+r(A-bE)\geqslant r((A-aE)-(A-bE))=n$$

因此 $r(A-aE)+r(A-bE)=n$。 □

2.3 向量

2.3.1 大纲要求

1. 理解 n 维向量、向量的线性组合与线性表示的概念。

2. 理解向量组线性相关、线性无关的概念，掌握向量组线性相关、线性无关的有关性质及判别法。
3. 理解向量组的极大线性无关组和向量组的秩的概念，会求向量组的极大线性无关组及秩。
4. 理解向量组等价的概念，理解矩阵的秩与其行（列）向量组的秩之间的关系。
5. 了解 n 维向量空间、子空间、基底、维数、坐标等概念。
6. 了解基变换和坐标变换公式，会求过渡矩阵。
7. 了解内积的概念，掌握线性无关向量组正交规范化的施密特（Schmidt）方法。
8. 了解规范正交基、正交矩阵的概念以及它们的性质。

2.3.2 线性相关

向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性表示：对于向量组 A 和向量 $\boldsymbol{\beta}$，若存在系数使得

$$x_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{\beta}$$

则称 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量组 A 线性表示。

向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性相关：至少有一个向量可以用其余向量表示，即存在一组不全为 0 的数使得

$$x_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{0}$$

则称向量组 A 线性相关；若不存在，则称向量组 A 线性无关。

向量组等价：向量组 A 若可以和 B 相互表出，则称他们等价。

2.3.3 向量空间

设 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 为 $\mathbb{R}$ 中的一个基，取新基 $\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_n$，则基变换公式为

$$B=AP,\quad(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_n)=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)P$$

其中 $P=A^{-1}B$ 称为旧基到新基的过渡矩阵，旧坐标 $\boldsymbol{y}$ 到新坐标 $\boldsymbol{z}$ 的变换公式是 $\boldsymbol{z}=P^{-1}\boldsymbol{y}$。

定理 2.3.1 ◇ Schmidt 正交化

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中一个线性无关的向量组，令

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1&=\boldsymbol{\alpha}_1\\
\boldsymbol{\beta}_2&=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1\\
&\cdots\\
\boldsymbol{\beta}_s&=\boldsymbol{\alpha}_s-\sum_{j=1}^{s-1}\frac{[\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_j]}{[\boldsymbol{\beta}_j,\boldsymbol{\beta}_j]}\boldsymbol{\beta}_j
\end{aligned}$$

则 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 是正交向量组，并且与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 等价。

如果基中的向量两两正交，则称为正交基；若正交基中每个向量都是单位向量，则称为规范正交基。

2.3.4 最小二乘法

不清楚会不会以最小二乘法为背景命题，记一下。

定理 2.3.2

设 A 是 $m \times n$ 的矩阵，如果存在向量 $\boldsymbol{x}_0$ 使得

$$|\beta - Ax_0|^2 \leqslant |\beta - Ax|^2$$

那么称 x_0 是方程 $Ax - \beta$ 的最小二乘解。证明：x_0 是最小二乘解当且仅当 x_0 是方程

$$A^{\mathsf{T}}Ax = A^{\mathsf{T}}\beta$$

的解。

证明 令 U 为矩阵的列空间，那么原式即

$$|\beta - Ax_0| \leqslant |\beta - Ax|$$

由遍历 x 则 Ax 遍历 U，故 $\beta - Ax_0$ 应当垂直于 U，那么

$$\alpha_i{}^{\mathsf{T}}(\beta - Ax_0) = 0, \quad \Rightarrow A^{\mathsf{T}}(\beta - Ax_0) = 0$$

□

2.4 线性方程组

2.4.1 大纲要求

1. 会用克拉默法则。
2. 理解齐次线性方程组有非零解的充分必要条件及非齐次线性方程组有解的充分必要条件。
3. 理解齐次线性方程组的基础解系、通解及解空间的概念，掌握齐次线性方程组的基础解系和通解的求法。
4. 理解非齐次线性方程组解的结构及通解的概念。
5. 掌握用初等行变换求解线性方程组的方法。

2.4.2 线性方程组的解

初等行变换不改变矩阵的解!!!

线性方程组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 x_1 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_n x_n = A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$$

解的情况：

- 无解：$r(A) < r(\widetilde{A})$；
- 有唯一解：$r(A) = r(\widetilde{A})$；
- 有无穷多组解：$r(A) = r(\widetilde{A}) < n$；

定理 2.4.1 ◇ Cramer 法则

方程组 $Ax = b$ 有唯一解的充要条件是 $|A| \neq 0$。定义 A_j 为矩阵 A 第 j 列换为常数项后的矩阵，此

时解为

$$\boldsymbol{x}=\left(\frac{|A_1|}{|A|},\cdots,\frac{|A_n|}{|A|}\right)$$

求解线性方程组：$Ax=b$;

1. 利用初等行变换将增广矩阵 $\widetilde{A}$ 化为行阶梯型矩阵 B;
2. 如果 $r(A)<r(\widetilde{A})$ 则方程矛盾，无解;
3. 如果 $r(A)=r(\widetilde{A})$，进一步把 $\widetilde{A}$ 化为行最简型矩阵。
   (a) 如果 $r(A)=r(\widetilde{A})=n$，说明方程组有唯一解。
   (b) 如果 $r(A)=r(\widetilde{A})=r<n$，说明方程组有无穷组解，令 r 个首个非零元对应的 x 取做非自由未知数，其余 $n-r$ 个未知数去做自由元，令自由未知数分别等于 $c_1,\cdots,c_n-r$，即可写出 $n-r$ 个参数的通解。

2.4.3 同解

如果线性方程 $Ax=0$ 的解都是 $Bx=0$ 的解，且 $Bx=0$ 的解也是 $Ax=0$ 的解，则称他们同解。

如果线性方程 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，则

- 矩阵 A 与 B 行等价。
- 存在可逆矩阵 P 使得 $PA=B$。
- $Ax=0$ 与 $A^{\mathsf{T}}Ax=0$ 与 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$ 同解。
- $r(A)=r(B)=r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$。

如果线性方程 $Ax=\boldsymbol{\alpha}$ 与 $Bx=\boldsymbol{\beta}$ 同解，则

- 矩阵 $(A,\boldsymbol{\alpha})$ 与 $(B,\boldsymbol{\beta})$ 行等价。
- 存在可逆矩阵 P 使得 $PA=B$。
- $r(A,\boldsymbol{\alpha})=r(B,\boldsymbol{\beta})=r\begin{pmatrix}A,\boldsymbol{\alpha}\\B,\boldsymbol{\beta}\end{pmatrix}$。

2.5 矩阵的特征值和特征向量

2.5.1 大纲要求

1. 理解矩阵的特征值和特征向量的概念及性质，会求矩阵的特征值和特征向量。

2. 理解相似矩阵的概念、性质及矩阵可相似对角化的充分必要条件，掌握将矩阵化为相似对角矩阵的方法。

3. 掌握实对称矩阵的特征值和特征向量的性质。

2.5.2 特征值

定义 2.5.1 ◇ 特征值，特征向量

设 A 是 n 级矩阵，如果存在数 λ 和非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 使得 $A\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 那么称 λ 是 A 的一个特征值，称 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 A 的属于特征值 λ 的一个特征向量，称 $f(\lambda)=|\lambda E-A|$ 是 A 的特征多项式。

笔记 注意零向量不是特征向量！

如果 λ_0 是 A 的特征值，对应的 α_0 是 A 的特征向量，则

- λ_0 是特征多项式 $f(\lambda_0)=0$ 的一个根；
- α_0 是齐次线性方程组 $(\lambda_0 E-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个解，该解空间的全部非零向量都是 λ_0 的特征向量，称为特征子空间。
- 对于多项式 $\varphi(x)$，则 $\varphi(\lambda_0)$ 是 $\varphi(A)$ 的特征值，α_0 仍是其对应的特征向量。
- 不同特征值对应的特征向量线性无关。
- 若 λ_0 是 $f(\lambda)$ 的 k 重根，则称 λ_0 的代数重数为 k，简称为重数。
- 若特征子空间的维度是 k，则称 λ_0 的几何重数为 k。几何重数一定不超过代数重数。
- 对于矩阵多项式 $\varphi(A)=O$，若 λ 是 A 的特征值则 $\varphi(\lambda)=0$。

定理 2.5.2

分属不同特征值的特征向量线性无关。

证明 设 λ_1,λ_2 是矩阵 A 上的不同特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 是分属于 λ_1,λ_2 的线性无关特征向量，假设存在系数使得

$$\boldsymbol{\gamma}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots k_s\boldsymbol{\alpha}_s+l_1\boldsymbol{\beta}_1\cdots+l_r\boldsymbol{\beta}_r=0$$

注意到左乘 A，得到

$$A\boldsymbol{\gamma}=\lambda_1(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots k_s\boldsymbol{\alpha}_s)+\lambda_2(l_1\boldsymbol{\beta}_1\cdots+l_r\boldsymbol{\beta}_r)=0$$

再试着乘以 λ_2 得到

$$\lambda_2\boldsymbol{\gamma}=\lambda_2(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots k_s\boldsymbol{\alpha}_s)+\lambda_2(l_1\boldsymbol{\beta}_1\cdots+l_r\boldsymbol{\beta}_r)=0$$

再由 $\lambda_1\neq\lambda_2$，相减分析得到只存在零解 $k_i=l_i=0$，即它们线性无关。 □

如果 n 级矩阵有 n 个特征值，则有如下结论：

- $\lambda_1+\cdots\lambda_n=\mathrm{tr}(A)$；
- $\lambda_1\cdots\lambda_n=|A|$；

设 λ 是矩阵 A 的一个特征值

矩阵	A	$f(A)$	A^{-1}	A^* (可逆)	$P^{-1}AP$	A^{T}
特征值	λ	$f(\lambda)$	λ^{-1}	$\frac{\|A\|}{\lambda}$	λ	λ
特征向量	α	α	α	α	$P^{-1}\alpha$	

2.5.3 相似矩阵

相似矩阵：如果存在 P 使得 $P^{-1}AP=B$，则称 A 与 B 相似，P 称为相似变换阵。

相似矩阵的性质：

- 相似不变量：特征多项式、特征值、迹、行列式、秩；
- 相似矩阵与对角矩阵 $\operatorname{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$ 相似，记作相似标准型；
- 幂等矩阵的相似矩阵仍是幂等矩阵，与幂零矩阵相似的矩阵仍是幂零矩阵。
- 若矩阵 $A\sim B$，则在多项式下仍有 $f(A)\sim f(B)$，$A^{\mathsf{T}}\sim B^{\mathsf{T}}$。
- 相似必合同。

定理 2.5.3 ⋄ 可对角化的充要条件

n 级矩阵 A 可对角化的充要条件是，存在 n 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 及其对应的特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$。此时令 $P=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，则

$$P^{-1}AP=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}=\Lambda$$

证明 如果 A 相似于对角矩阵 Λ，即存在可逆矩阵 $P=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 使得 $AP=P\Lambda$，注意到带入有

$$AP=(A\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,A\boldsymbol{\alpha}_n)=(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\lambda_n\boldsymbol{\alpha}_n)=P\Lambda$$

因此需要满足 $A\boldsymbol{\alpha}_i=\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i$，从而需要有 n 个线性无关的特征向量。此时每个特征值的几何重数都和代数重数相等。 □

可对角化的矩阵的性质：

- 包括相似矩阵的性质。
- 相似于自身的转置。

2.5.4 实对称矩阵

实对称矩阵的性质：

- 不同特征值对应的特征向量相互正交；
- 必能相似对角化，且可使用正交矩阵对角化；
- 若 n 阶，则 0 必为 A 的 $n-r(A)$ 重特征值；

定理 2.5.4

不同特征值对应的特征向量相互正交。

证明 设 λ_1,λ_2 是属于 A 的不同特征值，α_1,α_2 是分属于 λ_1,λ_2 的特征向量。注意到内积

$$\lambda_1[\alpha_1,\alpha_2]=\lambda_1{\alpha_1}^{\mathsf{T}}\alpha_2=(A\alpha_1)^{\mathsf{T}}\alpha_2={\alpha_1}^{\mathsf{T}}A\alpha_2={\alpha_1}^{\mathsf{T}}(\lambda_2\alpha_2)=\lambda_2[\alpha_1,\alpha_2]$$

从而 $(\lambda_1-\lambda_2)[\alpha_1,\alpha_2]=0$，又 $\lambda_1\neq\lambda_2$，故 $[\alpha_1,\lambda_2]=0$。 □

定理 2.5.5

若 n 级矩阵 A 正交相似于一个对角矩阵，那么 A 一定是对称阵。

证明 设存在正交阵 T 使得 $T^{-1}AT=\Lambda$，那么注意到

$$A^{\mathsf{T}}=\left(T\Lambda T^{-1}\right)^{\mathsf{T}}=\left(T^{-1}\right)^{\mathsf{T}}\Lambda^{\mathsf{T}}T^{\mathsf{T}}=T\Lambda T^{-1}=A$$

从而 A 是对称矩阵。 □

对于 n 级实对称矩阵 A，找一个正交矩阵 T，使得 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵的步骤如下。

1. 计算 $|\lambda E-A|$，求出它的全部不同的根：$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$，它们是 A 的特征值。

2. 对于每一个特征值 λ_j，求 $(\lambda_j E-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_{j1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{jr_j}$；然后把它们 Schmidt 正交化和单位化，得到 $\boldsymbol{\eta}_{j1},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{jr_j}$。它们也是 A 的属于 λ_j 的一个特征向量。

3. 令

$$T=(\boldsymbol{\eta}_{11},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{1r_1},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{m1},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{mr_m})$$

则 T 是 n 级正交矩阵，且

$$T^{-1}AT=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_1,\cdots,\lambda_m,\cdots,\lambda_m\}$$

例 2.5.6

给定实矩阵 A，求正交矩阵 T 使得 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&-2&2\\-2&-3&4\\2&4&-3\end{pmatrix}$$

解 首先求得特征多项式

$$|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda+8)$$

得到特征值为 $1,-8$，分别求得 $(\lambda E-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(-2,0,1)^{\mathsf{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,0)^{\mathsf{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,2,-2)^{\mathsf{T}}$$

正交归一化后得到

$$\boldsymbol{\eta}_1=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{\mathsf{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=\left(\frac{2}{3\sqrt{5}},\frac{\sqrt{5}}{3},\frac{4}{3\sqrt{5}}\right)^{\mathsf{T}},\boldsymbol{\eta}_3=\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)^{\mathsf{T}}$$

因此

$$T=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{2}{3\sqrt{5}}&-\frac{1}{3}\\0&\frac{\sqrt{5}}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{4}{3\sqrt{5}}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

2.6 二次型

2.6.1 大纲要求

1. 掌握二次型及其矩阵表示，了解二次型秩的概念，了解合同变换与合同矩阵的概念，了解二次型的标准形、规范形的概念以及惯性定理。

2. 掌握用正交变换化二次型为标准形的方法，会用配方法化二次型为标准形。

3. 理解正定二次型、正定矩阵的概念，并掌握其判别法

2.6.2 二次型

定义 2.6.1 ◇ 二次型

n 元二次型是 n 个变量的二次齐次多项式，它的一般形式是

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

把二次型的系数排成一个 n 级矩阵 A，则二次型可以写作矩阵形式

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}A\boldsymbol{x}$$

矩阵的合同：如果 n 级矩阵 A 与 B，如果存在可逆矩阵 C 使得

$$C^{\mathsf{T}}AC=B$$

那么称 A 与 B 合同，记作 $A\simeq B$。

对于 $\mathbb{R}^n$ 上的向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$，称 $x=Cy$ 是 $\boldsymbol{x}$ 到 $\boldsymbol{y}$ 的线性替换，若 C 是正交矩阵，则称为正交替换。替换下的二次型为

$$\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}A\boldsymbol{x}=(C\boldsymbol{y})^{\mathsf{T}}A(C\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}\left(C^{\mathsf{T}}AC\right)\boldsymbol{y}$$

替换前后的二次型等价。

二次型的等价形式

- 标准型：存在可逆线性替换，使得二次型只含平方项。
- 规范型：系数只取 $1,-1,0$。

定理 2.6.2

设 n 级实对称矩阵 A 的全部特征值为 $\lambda_1\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$，则对 $\mathbb{R}^n$ 中任意向量 $\boldsymbol{x}$ 有

$$\lambda_1\leqslant\frac{\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}A\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^2}\leqslant\lambda_n$$

证明 考虑其正交对角化 $T^{\mathsf{T}}AT=\Lambda$，令 $\boldsymbol{x}=T\boldsymbol{y}$，则

$$\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}(T^{\mathsf{T}}AT)\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}\Lambda\boldsymbol{y}=\lambda_1y_1^2+\cdots\lambda_ny_n^2$$

故

$$\lambda_1|\boldsymbol{y}|^2=\lambda_1(y_1^2+\cdots+y_n^2)\leqslant\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}A\boldsymbol{x}\leqslant\lambda_n(y_1^2+\cdots y_n^2)=\lambda_n|\boldsymbol{y}|^2$$

再者

$$|\boldsymbol{x}|^2=\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}(T^{\mathsf{T}}T)\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{y}=|\boldsymbol{y}|^2$$

故原式成立。 □

定理 2.6.3

设 n 级实对称矩阵 A,B, 若满足 $AB=BA$, 那么存在一个 n 级正交矩阵 T 使得 $T^{-1}AT$ 与 $T^{-1}BT$ 都是对角矩阵，即 A,B 的特征向量都是对方的特征向量。

证明 对于特征根不同时，说明是容易的，考虑 A 的每个特征向量 α 那么 $B\alpha$ 仍是 A 的特征向量；又特征子空间的维度为 1，那么 $\alpha = kB\alpha$，即证。

对于特征根重合时，复杂很多。 □

例 2.6.4

用正交替换把下述实二次型化为标准型

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^3 - 4xy - 4yz$$

解 首先得到矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

计算其特征值

$$|\lambda E - A| = (\lambda - 2)(\lambda - 5)(\lambda + 1)$$

即 A 的全部特征值为 $\lambda = 2, 5, -1$，对应的基础解系单位化得到

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)^{\mathsf{T}}, \boldsymbol{\eta}_2 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^{\mathsf{T}}, \boldsymbol{\eta}_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)^{\mathsf{T}}$$

令

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

此处 T 即是正交矩阵，且 $T^{-1}AT = \mathrm{diag}\{2, 5, -1\}$。令

$$(x,y,z)^{\mathsf{T}} = T(a,b,c)^{\mathsf{T}}$$

则

$$f(x,y,z) = 2a^2 + 5y^2 - z^2$$

2.6.3 正定二次型

实数域上的二次型简称为实二次型，n 元实二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}} A \boldsymbol{x}$ 经过一个适当的非退化线性替换 $\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{y}$ 可以化成下述形式的标准形

$$d_1 y_1^2 + \cdots + d_p y_p^2 - d_{p+1} y_{p+1}^2 - \cdots - d_r y_r^2$$

其中 $d_i > 0, i = 1, \cdots, r$。再做一次非退化线性替换可以变成

$$z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2$$

定义二次型的惯性系数

- 正惯性系数：规范型中系数为 $+1$ 的平方项个数；
- 负惯性系数：规范型中系数为 -1 的平方项个数；
- 符号差：正惯性系数减去负惯性系数。

矩阵合同的性质：

- 合同的充要条件：惯性系数相同；
- 合同不变量：规范型、秩；

n 阶矩阵 A 正定的充要条件：

- 当 $x \neq 0$ 时，$f(x) = x^\mathsf{T} A x > 0$；
- A 所有子矩阵的行列式均大于零；
- A 的所有特征值大于零；
- A 的正惯性系数为 n；
- 存在可逆阵 P 使得 $A = P^\mathsf{T} P$；
- A 的所有主元（无行交换）都是正的。

A 正定的结论：

- $kA, A^\mathsf{T}, A^{-1}, A^*$ 正定
- $|A| > 0$，A 可逆；
- $a_{ii} > 0$ 且 $|A_{ii}| > 0$；

第三章　概率论

3.1　随机事件和概率

3.1.1　大纲要求

1. 了解样本空间（基本事件空间）的概念，理解随机事件的概念，掌握事件的关系及运算。

2. 理解概率、条件概率的概念，掌握概率的基本性质，会计算古典型概率和几何型概率，掌握概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式以及贝叶斯（Bayes）公式。

3. 理解事件独立性的概念，掌握用事件独立性进行概率计算；理解独立重复试验的概念，掌握计算有关事件概率的方法。

3.1.2　概率

定义 3.1.1

设 A, B 是两个事件且 $\mathbb{P}(A) > 0$，我们称在已知 A 发生的条件下事件 B 发生的概率为条件概率，记作

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(A)}$$

假如 $\mathbb{P}(B \mid A) > \mathbb{P}(B)$，我们可以说事件 A 促进了事件 B 的发生。反之 $\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(A)$，则 B 的发生对 A 无影响。

若两事件 A, B 满足

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

则称 A, B 独立。

设一列事件 $A_1, A_2, \cdots$，假如从中取出任意有限个都成立

$$\mathbb{P}(A_{i1} \cdots A_{im}) = \mathbb{P}(A_{i1}) \cdots \mathbb{P}(A_{im})$$

那么称事件 $A_1, A_2, \cdots$ 相互独立。注意与两两独立的区别。

定理 3.1.2 ⋄ 全概率公式

设 $B_1, \cdots$ 为一列事件，他们两两互斥且每次试验至少发生一个。有时称这种性质为“完备事件群”。那么对任意事件 A 有

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A \mid B_i)$$

证明 显然

$$\mathbb{P}(A)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(B_iA)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A\mid B_i)$$

□

定理 3.1.3 ◇ 贝叶斯公式

对 n 个两两不相容事件 $A_1,\cdots,A_N$，则对事件 B 有

$$\mathbb{P}\left(A_j|B\right)=\frac{\mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(B|A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}$$

证明 显然

$$\mathbb{P}\left(A_j|B\right)=\frac{\mathbb{P}(A_jB)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{\mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(B|A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}$$

□

笔记 若 $\mathbb{P}(AB)=0$，不意味着 $AB=\varnothing$。比如 $[0,1]\cap[1,2]=\{1\}$，但概率是 0。

3.1.3 常见模型

摸球不放回模型：袋中有 a 个黑球，b 个白球，若不放回的取 n 个球，其中恰好 k 个白球的概率为

$$\mathbb{P}(A_k)=\frac{\binom{b}{k}\binom{a}{n-k}}{\binom{a+b}{n}}$$

摸球放回模型：袋中有 a 个黑球，b 个白球，若有放回的取出 n 个球，其中恰好 k 个白球的概率为

$$\mathbb{P}(B_k)=\binom{n}{k}\frac{a^{n-k}b^k}{(a+b)^n}=[x^k]\left(\frac{a+bx}{a+b}\right)^n$$

伯努利定理：假如一次试验中，事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$，则 n 重伯努利试验中，事件 A 恰好发生 k 次的概率为

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

定理 3.1.4 ◇ 抽签原理

袋中有 a 个黑球，b 个白球，若不放回的依次取球，每次抽中白球的概率都为 $\frac{b}{a+b}$。

证明 对于第 i 次抽检，可以看成从 $a+b$ 个球中抽出 i 个球排成一排，其可能数是 A_{a+b}^{i}。而第 i 个位置是白球的概率为 bA_{a+b-1}^{i-1}，故

$$\mathbb{P}(A_i)=\frac{bA_{a+b-1}^{i-1}}{A_{a+b}^{i}}=\frac{b}{a+b}$$

□

3.2 随机变量及其分布

3.2.1 大纲要求

1. 理解随机变量的概念，理解分布函数

$$F(x)=P\{X\leqslant x\},\quad -\infty<x<+\infty$$

的概念及性质，会计算与随机变量相联系的事件的概率。

2. 理解离散型随机变量及其概率分布的概念，掌握 $0-1$ 分布、二项分布 $B(n,p)$、几何分布、超几何分布、泊松（Poisson）分布 $P(\lambda)$ 及其应用。

3. 了解泊松定理的结论和应用条件，会用泊松分布近似表示二项分布。

4. 理解连续型随机变量及其概率密度的概念，掌握均匀分布 $U(a,b)$、正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$、指数分布及其应用，其中参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的指数分布 $E(\lambda)$ 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

5. 会求随机变量函数的分布。

3.2.2 常见分布

二项分布 $X\sim B(n,p)$ 如果 X 的概率分布为

$$\mathbb{P}\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.\quad k=0,1,\cdots,n$$

组合意义是 n 重伯努利实验中事件 A 发生的次数，其中 $\mathbb{P}(A)=p$。其 $\mathbb{E}[X]=np,\mathbb{D}[X]=np(1-p)$。

泊松分布 $X\sim P(\lambda)$ 如果 X 的概率分布为

$$\mathbb{P}\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},\quad k=0,1,\cdots$$

其 $\mathbb{E}[X]=\lambda,\mathbb{D}[X]=\lambda$。

几何分布 $X\sim G(p)$ 如果 X 的概率分布为

$$\mathbb{P}\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p,\quad k=1,2,\cdots$$

其 $\mathbb{E}[X]=\frac{1}{p},\mathbb{D}[X]=\frac{1-p}{p^2}$。

超几何分布 $X\sim H(n,N,M)$ 如果 X 的概率分布为

$$\mathbb{P}\{X=k\}=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}},\quad \max(0,n-N+M)\leqslant k\leqslant\min(M,n)$$

其组合意义是在 N 个产品 M 个不合格产品，从中取出 n 个次品数为 k。

均匀分布 $X\sim U(a,b)$ 如果 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{b-a},\quad a<x<b$$

其 $\mathbb{E}[X]=\frac{a+b}{2},\mathbb{D}[X]=\frac{(b-a)^2}{12}$。

指数分布 $X \sim E(\lambda)$ 如果 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

其 $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}, \mathbb{D}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$。

正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 如果 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

如果 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$。其 $\mathbb{E}[X] = \mu, \mathbb{D}[X] = \sigma^2$。

3.3 多维随机变量及其分布

3.3.1 大纲要求

1. 理解多维随机变量的概念，理解多维随机变量的分布的概念和性质，理解二维离散型随机变量的概率分布、边缘分布和条件分布，理解二维连续型随机变量的概率密度、边缘密度和条件密度，会求与二维随机变量相关事件的概率。
2. 理解随机变量的独立性及不相关性的概念，掌握随机变量相互独立的条件。
3. 掌握二维均匀分布，了解二维正态分布 $N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$ 的概率密度，理解其中参数的概率意义。
4. 会求两个随机变量简单函数的分布，会求多个相互独立随机变量简单函数的分布。

3.3.2 多维随机变量及其分布

随机变量 (X, Y) 的联合分布为

$$F(x, y) = \mathbb{P}\{X \leqslant x, Y \leqslant y\}$$

记为 $(X, Y) \sim F$。

离散型

离散型随机变量 (X, Y) 的联合分布律为

$$\mathbb{P}\{X = x_i, Y = y_i\} = p_{ij}$$

边缘分布律

$$p_{i,\cdot} = \mathbb{P}\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{i,j}, \quad p_{\cdot,y_j}\mathbb{P}\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{iy}$$

条件分布律

$$\mathbb{P}\{X = x_i | Y = y_i\} = \frac{\mathbb{P}\{X = x_i, Y = y_i\}}{\mathbb{P}\{Y = y_i\}} = \frac{p_{x_i,y_i}}{p_{\cdot,y}}$$

连续型

连续型随机变量 (X, Y) 的联合分布函数为

$$F(x, y) = \mathbb{P}\{X \leqslant x, Y \leqslant y\} = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u, v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

边缘分布函数

$$F_X(x) = \mathbb{P}\{X \leqslant x\} = F(x, +\infty), \quad F_Y(y) == \mathbb{P}\{Y \leqslant y\} = F(+\infty, y)$$

若 $F(x,y)$ 连续可导，则其概率密度为

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \, \partial y} = f(x,y)$$

反之若 f 在点 (x,y) 处连续，概率分布满足。类似的有边缘概率密度

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) \, \mathrm{d}y, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) \, \mathrm{d}x$$

笔记 连续型随机变量不能简单的定义为“各分量都是一维连续型随机变量”的那种。考虑 $X_1 = X_2$，则 (X_1, X_2) 仅在对角线处有值，故不可能存在概率密度函数。

二维随机变量的独立性

设二维连续型随机向量 (X,Y)，其概率密度是 $f(x,y)$。假设 $y \in [y_1, y_2]$，依条件概率的定义，有

$$F_{X|Y}(x \mid y_1 \leqslant Y \leqslant y_2) = \mathbb{P}\{X \leqslant x \mid y_1 \leqslant Y \leqslant y_2\} = \frac{\int_{-\infty}^{x} \int_{y_1}^{y_2} f(x,y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x}{\int_{y_1}^{y_2} f_Y(y) \, \mathrm{d}y}$$

对 x 求导，即得条件密度函数

$$f_{X|Y}(x \mid y_1 \leqslant y \leqslant y_1) = \frac{\int_{y_1}^{y_2} f(x,y) \, \mathrm{d}y}{\int_{y_1}^{y_2} f_Y(y) \, \mathrm{d}t}$$

考虑极限，y_1, y_2 收敛于 y 处时有

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

若二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数 $f(x,y)$ 满足

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

则称随机变量 $x_1, \cdots, x_n$ 相互独立。

3.3.3 二维正态分布

设二维随机变量的概率密度为

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-p^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - \frac{2\rho}{\sigma_1\sigma_2}(x-\mu_1)(y-\mu_2)\right)\right)$$

记为 $N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1, \sigma_2; \rho)$，可以看作两个分布 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 以相关系数 ρ 合起来。

3.3.4 两个随机变量简单函数

对于随机变量 (X,Y)，求 $g(X,Y)$ 的概率密度和分布函数有两种方法:

定义法

设其概率密度函数为 $f(x,y)$，先求 $Z=g(X,Y)$ 的概率密度

$$F_Z(z)=\mathbb{P}\{Z\leqslant z\}=\mathbb{P}\{g(X,Y)\leqslant z\}=\iint_{g(X,Y)\leqslant z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其概率密度则为 $f_Z(z)=\frac{\mathrm{d}F_z(z)}{\mathrm{d}z}$。

公式法

对于 $Z=X+Y$，则

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\,\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,\mathrm{d}x$$

对于 $Z=XY$，则

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|y|}f\left(\frac{z}{y},y\right)\mathrm{d}x$$

对于 $Z=\frac{X}{Y}$，则

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(yz,y)\,\mathrm{d}y$$

对于 $Z=\max\{X,Y\}$，则

$$F_Z(z)=F_X(z)F_Y(z)$$

对于 $Z=\min\{X,Y\}$，则

$$F_Z(z)=1-(1-F_X(z))(1-F_Y(z))$$

3.4 随机变量的数字特征

3.4.1 大纲要求

1. 理解随机变量数字特征（数学期望、方差、标准差、矩、协方差、相关系数）的概念，会运用数字特征的基本性质，并掌握常用分布的数字特征。

2. 会求随机变量函数的数学期望。

3.4.2 期望和方差

期望

设 X 是随机变量，其分布列为 $p_i=\mathbb{P}\{X=x_i\}$，记

$$\mathbb{E}[X]=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i,\quad \mathbb{E}[g(X)]=\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i)p_i$$

为随机变量 X 的数学期望。若 X 是连续型随机变量，则记

$$\mathbb{E}[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x,\quad \mathbb{E}[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

为其期望

期望的性质

- 对于常数 C，有 $\mathbb{E}[C]=C$；
- 线性性：$\mathbb{E}[\sum k_iX_i]=\sum k_i\mathbb{E}[X]$；
- 独立性：如果 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，$\mathbb{E}[X_1X_2\cdots X_n]=\mathbb{E}[X_1]\cdots\mathbb{E}[X_n]$。

方差

我们记 $\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X)^2]$ 为 X 的方差，有

$$\mathbb{D}[X]=\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X)^2]=\mathbb{E}X^2-(\mathbb{E}X)^2$$

称 $\sqrt{\mathbb{D}[X]}$ 为 X 的标准差，或者均方差，记为 $\sigma(X)$。

若 X 是离散型随机变量，则

$$\mathbb{D}[X]=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-\mathbb{E}X)^2p_i$$

连续性随机变量，则

$$\mathbb{D}[X]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mathbb{E}X)^2f(x)\,\mathrm{d}x$$

方差的性质

- 对于常数 C，有 $\mathbb{D}[C]=C^2$；
- 线性性：如果 $X_1,\cdots,X_n$ **相互独立**，$\mathbb{D}[\sum k_iX_i]=\sum k_i^2\mathbb{E}[X]$。

3.4.3 协方差和相关系数

矩

- k 阶原点矩：$\mathbb{E}[X^k]$；
- k 阶中心距：$\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X)^k]$；
- $k+l$ 阶混合矩：$\mathbb{E}[X^kY^l]$；
- $k+l$ 阶中心距：$\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X)^k(Y-\mathbb{E}Y)^l]$；

协方差

我们定义 (X,Y) 的协方差为

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y))]=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y$$

称 $\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{D}[X]\mathbb{D}(Y)}}$ 为 X,Y 的相关系数。

协方差的性质

- $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$；
- $\mathrm{Cov}(X,X)=\mathbb{D}X$；
- $\mathrm{Cov}(aX,bY)=ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$；
- $\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y)$；
- $\mathbb{D}(X\pm Y)=\mathbb{D}X+\mathbb{D}Y\pm 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$；

X,Y 相互独立可以推出不相关，但反之不行；

X,Y 不相关与下列命题互推

- $\rho_{XY}=0$；
- $\operatorname{Cov}(X,Y)=0$
- $\mathbb{E}[XY]=\mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y$；
- $\mathbb{E}(X\pm Y)=\mathbb{E}X+\mathbb{E}Y$。

3.4.4 Γ 函数

Γ 函数是一有力的工具，其定义为

$$\Gamma(z)=\int_0^{+\infty} t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

其具有递推式和余元公式

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z),\quad \Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$$

特殊的，$\Gamma(n+1)=n!$，和 $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$。不难化简

$$I_n=\int_0^{+\infty} x^n\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(x^2\right)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}\left(x^2\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

3.5 大数定律和中心极限定理

3.5.1 大纲要求

1. 了解切比雪夫不等式。
2. 了解切比雪夫大数定律、伯努利大数定律和辛钦大数定律（独立同分布随机变量序列的大数定律）。
3. 了解棣莫弗-拉普拉斯定理（二项分布以正态分布为极限分布）和列维-林德伯格定理（独立同分布随机变量序列的中心极限定理）。

3.5.2 神秘公式

定理 3.5.1 ⋄ 切比雪夫不等式

如果随机变量 X 的期望 $\mathbb{E}[X]$ 和方差 $\mathbb{D}[X]$ 存在，则对任意 $\varepsilon>0$ 有

$$\mathbb{P}\{|X-\mathbb{E}[X]|<\varepsilon\}\geqslant 1-\frac{\mathbb{D}[X]}{\varepsilon^2}$$

设随机变量 X 与随机变量序列 $\{X_n\}$，如果对任意的 $\varepsilon>0$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\{|X_n-X|<\varepsilon\}=1$$

则称随机变量序列 $\{X_n\}$ 依概率收敛于随机变量 X，记为

$$\lim_{n\to\infty}X_n=X(P),\quad 或\ X_n\xrightarrow{P}X(n\to\infty)$$

定理 3.5.2 ⋄ 切比雪夫大数定律

设 $\{X_n\}$ 是相互独立的随机变量序列，如果方差 $\mathbb{D}[X]$ 存在且有一致有上界，则 $\{X_n\}$ 服从大数定

律

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$$

定理 3.5.3 ◇ 伯努利大数定律

假设 μ_n 是 n 重伯努利实验中时间 A 发生的次数，在每次实验中 A 发生的概率为 $p(0 < p < 1)$，则

$$\frac{\mu_n}{n} \xrightarrow{P} p$$

定理 3.5.4 ◇ 辛钦大数定律

设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列，如果 $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ 存在，则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \mu$$

定理 3.5.5 ◇ 列维 - 林德伯格定理

假设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列，如果

$$\mathbb{E}(X_i) = \mu, \mathbb{D}(X_i) = \sigma^2 > 0$$

存在，则对任意的实数 x 有

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant x\right\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \Phi(x)$$

定理 3.5.6 ◇ 棣莫弗 - 拉普拉斯定理

设随机变量 $Y_n \sim B(n,p)$，其中 $0 < p < 1$ 且 $n > 1$，则对任意的实数 x，有

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant x\right\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \Phi(x)$$

3.6 数理统计的基本概念

3.6.1 大纲要求

1. 理解总体、简单随机样本、统计量、样本均值、样本方差及样本矩的概念，其中样本方差定义为

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})$$

2. 了解 χ^2 分布、t 分布、F 分布的概念及性质，了解上侧 α 分位数的概念并会查表计算。
3. 了解正态总体的常用抽样分布。

3.6.2 统计量

随机试验的每一个可能的观察值称为个体，全部观察值称为总体，总体中包含个体的个数称为总体的容量。

n 个相互独立且与总体 X 同分布的随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 称为来自总体 X 或者来自分布函数 F 的简单随机样本，其容量为 n。一次抽样结果的 n 个具体数值称为 $X_1,\cdots,X_n$ 的一个观测值（样本值）。

设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的一个样本，g 为仅与 x 有关的 n 元函数，则称 g 为样本的一个统计量。若 $(x_1,\cdots,x_n)$ 为样本值，则 $g(x_1,\cdots,x_n)$ 为观测值。

假设总体 X 的分布函数为 F，则 $(X_1,\cdots,X_n)$ 的分布函数为

$$F(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}F(x_i)$$

样本均值和样本方差

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

样本 k 阶（原点）矩和样本 k 阶中心矩

$$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k,\quad B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k$$

将 n 个观测量从小到大的顺序排列，记随机变量 $X_{(k)}$ 为第 k 顺序统计量。

显然样本与总体同分布

$$\mathbb{E}[X_i]=\mathbb{E}[X],\quad \mathbb{D}[X_i]=\mathbb{D}[X]$$

均值与方差

$$\mathbb{E}[\overline{X}]=\mathbb{E}[X],\quad \mathbb{D}(\overline{X})=\frac{1}{n}\mathbb{D}[X],\quad \mathbb{E}[S^2]=\mathbb{D}[X]$$

笔记 为什么样本方差的分母是 $n-1$？因为此时 $\mathbb{E}[S^2]=\mathbb{D}[X]$，即 S^2 是 $\mathbb{D}[X]$ 的无偏估计量。具体的，不难带入样本均值计算

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\frac{\sum X_i}{n}\right)^2\right]=\mathbb{E}\left[\frac{n-1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{i\neq j}X_iX_j\right)\right]=(n-1)\mathbb{D}[X]$$

3.6.3 三大分布

χ^2 分布 若随机变量 $x_1,\cdots,x_n$ 相互独立且都服从标准正态分布，则随机变量 $X=\sum X_i^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布，记为 $X\sim\chi^2(n)$。其中 $\mathbb{E}[\chi^2]=n,\mathbb{D}[\chi^2]=2n$。

t 分布 设随机变量 $X\sim N(0,1),Y\sim\chi^2(n)$，$X$ 与 Y 互相独立，则随机变量 $t=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布，记为 $t\sim t(n)$.

F 分布 设随机变量 $X\sim\chi^2(n_1),y\sim\chi^2(n_2)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $F=\frac{X/n_1}{Y/n_2}$ 服从自由度为 (n_1,n_2) 的 F 分布，记为 $F\sim F(n_1,n_2)$。

对于给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$ 和分布 X，称满足

$$\mathbb{P}\{X>X_\alpha\}=\int_{X_\alpha}^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\alpha$$

的 X_α 为 X 分布的上 α 分位点。

3.6.4 常用结论

独立分布的可加性

- 对于 $X\sim B(n,p),Y\sim B(m,p)$，则 $X+Y\sim B(n+m,p)$；
- 对于 $X\sim P(\lambda_1),Y\sim P(\lambda_2)$，则 $X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$；
- 对于 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，则 $X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$；
- 对于 $X\sim \chi^2(n),Y\sim \chi^2(m)$，则 $X+Y\sim \chi^2(n+m)$；

设正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则

- $\mathbb{E}[X]=\mu$，$\mathbb{D}[X]=\sigma^2$，$\mathbb{E}[X^2]=\mu^2+\sigma^2$，$\mathbb{D}[X^2]=2\sigma^2(\sigma^2+2\mu^2)$。
- $\mathbb{E}[|X-\mu|]=\sqrt{\frac{2\sigma^2}{\pi}}$，$\mathbb{D}[|X-\mu|]=\sigma^2$，$\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$。
- $\mathbb{E}[S^2]=\sigma^2$，$\mathbb{D}[S^2]=\frac{2\sigma^2}{n-1}$。

设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自正态总体 X 的一个样本，$\overline{X},S^2$ 分别是其样本均值和方差，则

- $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立。
- $$\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right),\quad \frac{(\overline{X}-\mu)}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$
- $$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\sim \chi^2(n)$$
- $$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2\sim \chi^2(n-1)$$
- $$\frac{(\overline{X}-\mu)}{\sqrt{S^2/n}}\sim t(n-1)$$

3.7 参数估计

3.7.1 大纲要求

1. 理解参数的点估计、估计量与估计值的概念。
2. 掌握矩估计法（一阶矩、二阶矩）和最大似然估计法。
3. 了解估计量的无偏性、有效性（最小方差性）和一致性（相合性）的概念，并会验证估计量的无偏性。
4. 理解区间估计的概念，会求单个正态总体的均值和方差的置信区间，会求两个正态总体的均值差和方差比的置信区间。

3.7.2 参数的点估计

设总体 X 的分布形式已知，但含有未知参数 θ，或者总体的某数字特征存在但未知，从总体中抽取样本 $X_1,\cdots,X_n$，相应的样本值为 $x_1,\cdots,x_n$。借助于样本给出一个未知参数具体数值的参数估计问题就是点估计问题。

要解决点估计问题,就要构造一个适当的统计量 $\widehat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$ 作为参数 θ 的近似值,则称 $\widehat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$ 为 θ 的估计量，$\widehat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$ 为 θ 为 θ 的估计值。

3.7.3 矩估计法

设总体 X 分布有 n 个样本，有 k 个未知参数。若 X 的原点矩存在，我们令样本矩等于总体矩

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} X_i^l = \mathbb{E}(X^l), \quad l = 1, \cdots, k$$

这是包含 k 个参数的 k 个方程，由此解得矩估计量和矩估计值。

一般约定：用矩法方程求总体未知参数的估计量时，从低阶开始。

3.7.4 最大似然估计法

似然性与概率的区别：

- 概率 $p(x;\theta)$ 是在已知参数 θ 的情况下，发生观测结果 x 的概率；
- 似然性 $L(x;\theta)$ 是从观测结果 x 出发，分布函数为 θ 的可能性大小。

最大似然估计值即对给定的观测值 $x_1, \cdots, x_n$，该估计值 $\widehat{\theta}$ 使似然性最大。

假设 X 是离散型随机变量，其概率分布为 $\mathbb{P}\{X = x\} = p(x;\theta)$，那么求其取值概率

$$L(x_1, \cdots, x_n; \theta) = \mathbb{P}\{X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n\} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\{X_i = x_i\} = \prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)$$

称为样本的似然函数。若存在 $\widehat{\theta}$ 使得 L 取到最大值，则称 $\widehat{\theta}$ 为最大似然估计值，对应的统计量是 θ 的最大似然估计量。

同理，连续型随机变量也有

$$L(x_1, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

最大似然估计法步骤：

1. 计算似然函数 $L(\theta)$
2. 求关于 θ 的最大值点，一般情况下可微，求导或者对数求导

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}(\ln L)}{\mathrm{d}\theta} = \frac{L'(\theta)}{L(\theta)} = 0$$

得到极值点

3. 用样本 X_i 代替样本值 x_i，得到最大似然估计量 $\widehat{\theta}$。

倘若有多个参数 θ，也是计算多元极值点。

笔记 注意参数 θ 的取值范围，有时候最值不是极值。

3.7.5 估计量的评选标准

无偏性：若估计量 $\widehat{\theta}$ 的数学期望 $\mathbb{E}[\widehat{\theta}]$ 存在，且 $\mathbb{E}[\widehat{\theta}] = \theta$，则称 $\widehat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量。

有效性：若 $\widehat{\theta}_1$ 和 $\widehat{\theta}_2$ 都是 θ 的估计量，若 $\mathbb{D}[\widehat{\theta}_1] \leqslant \mathbb{D}[\widehat{\theta}_2]$，则称 $\widehat{\theta}_1$ 较 $\widehat{\theta}_2$ 有效。一致性（相合性）：若估计量 $\widehat{\theta}$ 在 $n \to \infty$ 时 $\widehat{\theta}$ 依概率收敛于 θ，则称 $\widehat{\theta}$ 是 θ 的一致估计量。

一致性：若估计量 $\widehat{\theta}$ 对任意 $\varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{|\widehat{\theta} - \theta| \geqslant \varepsilon\} = 0$$

即当 $\widehat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$ 时，称 $\widehat{\theta}$ 为 θ 的一致估计。

3.7.6 区间估计

设总体 X 的分布 $F(x;\theta)$ 含有未知参数 θ，若对于给定的概率 $1-\alpha$ 存在两个统计量 θ_1,θ_2 使得

$$\mathbb{P}\{\theta_1<\theta<\theta_2\}=1-\alpha$$

则称随机区间 (θ_1,θ_2) 是 θ 置信度 $1-\alpha$ 的置信区间，α 称为显著性水平。若 $\mathbb{P}\{\theta<\theta_1\}=\mathbb{P}\{\theta>\theta_2\}=\frac{\alpha}{2}$ 时，则称这种置信区间为等尾置信区间。

一般对于具体题目，要求区间估计时，首先建立 $\widehat{\theta}$ 的统计量，再与常见分布建立联系，利用常见分布的分位点求解。

对于 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其置信区间为

- σ^2 已知，μ 的置信水平是 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}=N(0,1),\qquad I_1=\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$$

- σ^2 未知，μ 的置信水平是 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$U=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1),\qquad I_2=\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2},\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}\right)$$

- μ 已知，σ^2 的置信水平是 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$W'=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n),\qquad I_3=\left(\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)},\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right)$$

- μ 未知，σ^2 的置信水平是 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$W=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),\qquad I_4=\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

3.8 假设检验

3.8.1 大纲要求

1. 理解显著性检验的基本思想，掌握假设检验的基本步骤，了解假设检验可能产生的两类错误。
2. 掌握单个及两个正态总体的均值和方差的假设检验。

3.8.2 假设检验的基本概念

假设检验问题：总体函数未知，或者参数未知的情况下，提出一些关于总体分布或者参数的假设，然后抽取样本构建统计量，再根据样本所提的假设做出接受或者拒绝的决策。

检验法：借助于样本值来判断接受假设，或者拒绝假设的法则，称为检验法。

需要着重考察的假设称为原假设，常常记为 H_0；与原假设相对立的假设称为备选假设（或对立假设），备择假设记为 H_1。

检验统计量：如果基于某一个统计量的观测值来确定接受 H_0 或者拒绝 H_0 时，这一统计量称为检验统计量。

当统计量落在某个区域时就拒绝 H_0，这一区域称为拒绝域，拒绝域的边界点称为临界点。

两类错误：

- 第 I 类错误：弃真，H_0 实际上为真时但拒绝 H_0。

- 第 II 类错误：取伪，H_0 实际上为假但接受 H_0。

显著性水平：在做检验时要求犯第一类错误的概率 $\leqslant \alpha$，则 α 称为显著性水平，通常取 $0.1, 0.05$ 等值。

显著性检验：对于给定的样本容量，只控制犯第 I 类错误的概率，而不考虑犯第 II 类错误的检验法，称为显著性检验。

假设检验的一般步骤：

- 提出所要检验的原假设 H_0 与备择假设 H_1；
- 选择检验的统计量，并在 H_0 成立下求出它的分布；
- 给定显著性水平，在 H_0 成立下去的那个临界值和否定域；
- 由样本值推算出统计量的值，判断该值是否落入否定域。

正态分布下均值与方差的假设检验：不抄了，看张宇。